المحاضرة الخامسة : الاستقراء الداخلي باستخدام متعدد حدود لاكرانج :

الصيغة العامة للاستقراء الداخلي باستخدام متعدد حدود لا كرانج (طريقة لاكرانج): For the general formula of interpolation using Lacrange polynomials (Lacrange method):

افرض انه لدينا ازواج القيم الاتية $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots, (x_n, y_n)$ حيث ان n عدد صحيح موجب ,وافرض أيضا اننا نرغب ببناء دالة استقراء داخلي وفق طريقة لاكرانج , بمعنى اخر بناء دالة لتقدير قيمة y عند قيمة معلومة x, بحيث ان $x < x < x_b$ $x \neq x_i$ لجميع قيم i=0,1,2,….n .

تعرف صيغة دالة الاستقراء العامة وفق طريقة لاكرانج كالاتي :

$$y = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots\dots\dots + L_n(x)y_n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} L_i(x)y_i \dots\dots\dots\dots(1)$$

حيث ان :

$$L_i(x) = \left(\frac{x-x_0}{x_i-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_i-x_1}\right)\dots\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\dots\left(\frac{x-x_n}{x_i-x_n}\right)$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \dots\dots\dots(2)$$

ويمكن ان يكون الاستقراء الداخلي خطيا عندما $n = 1$ عندما $n = 2$ او من أي درجة أخرى لغاية الدرجة النونية.

1- الاستقراء الداخلي الخطي Linear Interpolation

كما مر سابقا , نحتاج لاختيار زوجين من البيانات فقط لتطبيق الاستقراء الداخلي الخطي وذلك تبعا للشروط الموضحة في المحاضرة الأولى . الاختلاف الوحيد اننا سنرمز للزوجين الذين وقع عليهما الاختيار ب $(x_0, y_0), (x_1, y_0)$,وذلك تماشيا مع القانون الموضح في المعادلتين (1)و(2) أعلاه والذي يحتوي على رمزي الجمع $\sum$ والضرب $\prod$. اذن بمكن تقدير قيمة y بالتعويض في

المعادلتين (1)و(2) أعلاه كالاتي (لاحظ ان $n=1$ في هذه الحالة , أي ان i تأخذ القيم $1,0$ فقط):

$$y=\sum_{i=0}^{n=1} L_i(x)\,y_i$$

$$= L_0(x)\,y_0 + L_1(x)\,y_1 \quad \text{..................(3)}$$

وان $L_i(x)$ تكون كالاتي عندما $i=0$:

$$L_0(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n=1}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

$$=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

وعندما $i=1$:

$$L_1(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n=1}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}$$

$$=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

وبعد إيجاد قيم $L_i(x)$ نعوض في دالة الاستقراء الخطي (المعادلة رقم 3) لحساب قيمة y

Example

From the table data below the value of y when x = 1.5 Using with linear interpolation, according to the Lacrange method.

x	1	1.3	1.6	1.9	2.2
y	0.1411	-0.6878	-0.9962	-0.5507	0.3115

الحل:

ستكون الأزواج المختارة في هذه الحالة هي $\left(x_0, y_0\right)=\left(1.3,-0.6878\right)$ و

$\left(x_1, y_1\right)=\left(1.6,-0.9962\right)$ نبدأ بإيجاد قيمة $L_i\left(x=1.5\right)$, وكالاتي:

$$L_0\left(x=1.5\right)=\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n=1}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

$$=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{1.5-1.6}{1.3-1.6}=\frac{-0.1}{-0.3}=0.3333$$

$$L_1\left(x=1.5\right)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n=1}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}$$

$$=\frac{x-x_1}{x_1-x_0}=\frac{1.5-1.3}{1.6-1.3}=\frac{0.2}{0.3}=0.6667$$

وبذلك يمكن تقدير y وكالاتي:

$$y=\sum_{i=0}^{n=1}L_i\left(x=1.5\right)y_i$$

$$=L_0\left(x=1.5\right)y_0+L_1\left(x=1.5\right)y_1$$

$$=0.3333\left(-0.6878\right)+0.6667\left(-0.9962\right)=-0.8934$$

علما ان دالة الاستقراء المستخدمة أعلاه صالحة لجميع قيم x الواقعة ضمن الفترة (1.3 ,1.6) فقط.

2-الاستقراء الداخلي التربيعي Quadratic interpolation:

في الاستقراء الداخلي التربيعي نحتاج لاختيار ثلاثة ازواج من البيانات لتقدير دالة الاستقراء نفرض ان الأزواج التي تم اختيارها هي $\left(x_0,y_0\right),\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$ (راجع المحاضرة الثانية للوقوف على شروط اختيار الأزواج الثلاثة) عندئذ نعوض في المعادلتين (1) و(2) أعلاه لتقدير قيمة y عند قيمة محددة ل x وكالاتي .

$$y=\sum_{i=0}^{n=2}L_i\left(x\right)y_i$$

$$=\ L_0\left(x\right)y_0+L_1\left(x\right)y_1+L_2\left(x\right)y_2.....(4)$$

وان $L_i\left(x\right)$ تكون كالاني عندما $i=0$:

$$L_0\left(x\right)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n=2}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

$$=\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)$$

وعندما $i=1$:

$$L_1\left(x\right)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n=2}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}$$

$$=\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)$$

وعندما $i=2$:

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^{n=2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j}$$

$$= \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

وبعد إيجاد قيم $L_i(x)$ نعوض في دالة الاستقراء الخطي (المعادلة رقم 4) لحساب قيمة y.

Example: For the data of the previous example, estimate the value of y when x=1.5 using a quadratic interpolation Lacrange polynomial.

الحل: كما ذكرنا سابقا فاننا نحتاج الى ثلاثة ازواج من البيانات لتقدير النمودج التربيعي وستكون الأزواج المختارة في هذه الحالة هي $(x_0, y_0) = (1.3, -0.6878)$, $(x_1, y_1) = (1.6, -0.9962)$, $(x_2, y_2) = (1.9, -0.5507)$

نبدا بإيجاد قيمة $L_i(x = 1.5)$ وكالاتي:

$$L_0\left(x=1.5\right)=\prod_{\substack{j=0}}^{n=2}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

$$j\neq 0$$

$$=\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)=\left(\frac{1.5-1.6}{1.3-1.6}\right)\left(\frac{1.5-1.9}{1.3-1.9}\right)$$

$$=\left(\frac{-0.1}{-0.3}\right)\left(\frac{-0.4}{-0.6}\right)=0.2222$$

$$L_1\left(x\right)=\prod_{j=0}^{n=2}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}$$

$$j\neq 1$$

$$=\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)=\left(\frac{1.5-1.3}{1.6-1.3}\right)\left(\frac{1.5-1.9}{1.6-1.9}\right)$$

$$=\left(\frac{0.2}{0.3}\right)\left(\frac{-0.4}{-0.3}\right)=0.8889$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^{n=2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j}$$

$$= \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) = \left(\frac{1.5 - 1.3}{1.9 - 1.3} \right) \left(\frac{1.5 - 1.6}{1.9 - 1.6} \right)$$

$$= \left(\frac{0.2}{0.6} \right) \left(\frac{-0.1}{0.3} \right) = -0.1111$$

اذن يمكن تقدير قيمة y وكالاتي :

$$y = \sum_{i=0}^{n=2} L_i(x = 1.5)\, y_i$$

$$= L_0(x = 1.5)\, y_0 + L_1(x = 1.5)\, y_1 + L_2(x = 1.5)\, y_2$$

$$= 0.222(-0.6878) + 0.8889(-0.9962) - 0.1111(-0.5507)$$

$$= -0.9772$$

علما ان دالة الاستقراء المستخدمة أعلاه صالحة لجميع قيم x الواقعة ضمن الفترة (1.9 ,1.3) فقط.