3- الاستقراءالداخلي النوني باستخدام متعدد حدود نيوتن للفروق المقسومة. Nth Interpolation Using Newton's Polynomial for Divided Differences

في هذه الحالة تكون دالة الاستقراء كالاتي:

$$y = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + B_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

حيث نحتاج في هذه الحالة الى $n+1$ من ارواج البيانات المتوفرة لتقدير قيم $B_0, B_1, B_2 ..... B_n$.
وبتعويض جميع الأزواج التي تم اختيارها في دالة الاستقراء بالطريقة ذاتها التي تم تطبيقها في الاستقراء الداخلي التربيعي ,يمكن ان نتوصل الى الاتي :

$$B_0 = f[x_0] = y_0$$

$$B_1 = f[x_0, x_1] = \frac{y_{1-} y_0}{x_1 - x_0}$$

$$B_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)}$$

$$B_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{(x_3 - x_0)}$$

$$B_{n-1} = f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] = \frac{f[x_1, x_2 ... x_{n-1}] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-2}]}{(x_{n-1} - x_0)}$$

$$B_n = f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2 ... x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{(x_n - x_0)}$$

حيث ان $B_n = f[x_0, x_1, ..., x_n]$ تسمى بالفرق المقسوم النوني وبعد حساب جميع قيم $B_0, B_1, B_2 ..... B_n$ ونعوض في دالة الاستقراء ونحسب قيمة المطلوبة.

ولتسهيل عملية حساب الفروق المقسومة نضع البيانات في جدول وكالاتي.:

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+4}]$
x_0	$y_0 = f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$y_1 = f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$y_2 = f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$y_3 = f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$y_4 = f[x_4]$				

علما الخلايا المؤشرة باللون الأحمر تمثل قيم B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 لاحظ انه تم عرض القيم $x_0, x_1, x_2, ...x_4$ في الجدول وذلك بسبب محددات عرض الصفحة .

Example

The table below shows the values of the natural logarithm of some real numbers, according to the indicator about each of them:

7	6.3	6	5.5	4.5	4	x
1.945910	1.840550	1.791759	1.704748	1.504077	1.386294	y=ln(x)

Required: To estimate the value of the natural logarithm of x = 5 using linear interpolation and calculate the Newton's polynomial method for the dividing differences of the fourth degree (i.e. n = 4).

الحل:

تكون دالة الاستقراء في هذه الحالة كالاتي :

$$y = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1) + B_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+B_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

وبما ان النموذج المطلوب تقديره من الدرجة الرابعة ,اذن نحتاج لاختيار خمسة ازواج من البيانات لتقدير دالة الاستقراء الداخلي ومن جدول البيانات فان الأزواج التي سنختارها تكون .

$$(x_0, y_0) = (4,\ 1.386294), (x_1, y_1) = (4.5,\ 1.504077), (x_2, y_2) = (5.5\ 1.704748),$$
$$(x_3, y_3) = (6,\ 1.791759), (x_4, y_4) = (6.3\ ,1.840550)$$

ويمكن الان الحل وكما في الجدول الموضح ادناه :

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+4}]$
4	1.386294				
		0.235566			
4.5	1.504077		-0.023263		
		0.200671		0.002749	
5.5	1.704748		-0.017766		-0.000342
		0.174022		0.001963	
6	1.791759		-0.014232		
		0.1626367			
6.3	1.840550				

$$B_0 = 1.386294 \quad B_1 = 0.235566 \quad B_2 = -0.023263$$
$$B_3 = 0.002749 \quad B_4 = -0.000342$$

وبالتعويض بدالة الاستقراء:

$$y = 1.386294 + 0.235566(x - 4) - 0.023263(x - 4)(x - 4.5)$$
$$+0.002749(x - 4)(x - 4.5)(x - 5.5) - 0.000342\ (x - 4)(x - 4.5)(x - 5.5)(x - 6)$$

$$y = 1.386294 + 0.235566(5-4) - 0.023263(5-4)(5-4.5)$$
$$+0.002749(5-4)(5-4.5)(5-5.5) \text{-} 0.000342\ (5-4)(5-4.5)(5-5.5)(5-6)$$
$$\Rightarrow y = 1.609541$$

اذن تكون القيمة التقديرية للوغارتم الطبيعي للعدد 5 تساوي 1.609541 وذلك حسب الاستقراء الداخلي بطريقة متعدد حدود نيوتن للفروق المقسومة من الدرجة الرابعة (intrepolation by Newton's polynomial method for dividing differences of the fourth degree).