# مولّدات الأعداد العشوائية (*)

# Random Number Generators

## 1.2. توليد الأعداد العشوائية Random number generators:

إنَّ الأعداد العشوائية هي متتالية أعداد لها الخاصية العشوائية، إذ لا يمكن التنبؤ بأي عنصر انطلاقًا من العناصر التي تسبقه، ولا سيما أن هذه الأعداد لا يمكن أن تكوّن متوالية أو أن تتبع أي نمط منتظمًا أو متكررًا.

تتوافر في الوقت الحاضر مُوَلّدات أعداد عشوائية ذوات دورات مختلفة الأطوال كجزء من برمجيات معظم حواسيب أو الأنظمة الحاسوبية، للحصول على متتالية من الأعداد العشوائية، وبما أنَّ المحاكاة الحاسوبية للأعداد العشوائية تتطلب الحصول عليها من جديد بهدف المقارنة والتحقق، فإنَّها لا تعطينا أعدادًا عشوائية فعلية، وإنما فقط متتالية شبه عشوائية ،ويكون ذلك غالبًا بأخذ البواقي بمقياس عدد أولي كبير (طرائق تطابقية).

### ٥-٣ الأعداد العشوائية Random Numbers:

**العدد العشوائي Random Number** هو عدد يتولد بطريقة المصادفة وخارج سيطرتنا وبحيث لا يمكن التنبؤ بقيمته إذا ما أعطيت الأعداد السابقة

وحسب معجم الرياضيات لمؤلفيه يوروفسكي وبوروفان للسنة ١٩٩٥ فان الاعداد العشوائية هي "**متتابعة أعداد لها الخاصة العشوائية، اذ لا يمكن التنبؤ بأي عنصر انطلاقاً من العناصر التي تسبقه، وبوجه خاص لا يمكن لهذه الأعداد أن تكّون متوالية أو ان تتبع أي نمط منتظم أو متكرر**". ان الأعداد المولّدة بوساطة برمجيات Software مولّد عشوائي Random Number Generator لحاسوب لا تكون عشوائية فعلا لان نمطها يتكرر دورياً، لذا يطلق عليها **أعداد عشوائية زائفة Pseudo Random Numbers** .

وكما سوف نلاحظ لاحقاً فان من المهام الأساسية للمحاكاة توليد الأعداد العشوائية والتي تتبع توزيعاً احتمالياً معيناً. ومن الأعداد العشوائية التي لها أهمية خاصة في المحاكاة هي الأعداد التي تتبع التوزيع المنتظم، أو **الأعداد العشوائية المنتظمة Uniform Random Numbers**. والأعداد العشوائية المنتظمة هي عبارة عن أعداد عشوائية لها احتمالية ثابتة ومتساوية للحدوث في مدة معينة. فعلى سبيل المثال لو أعيدت تجربة رمي

## 3.2. طرائق توليد الأعداد العشوائية:

هنالك عدة طرائق لتوليد الأعداد العشوائية وبكفاءات مختلفة، وسوف يتم التطرق لها بشيء من التفصيل، على النحو الاتي:

### *1.3.2. التجربة العشوائية Randomized experiment :*

من خلال إجراء تجربة عشوائية مثلًا تجربة رمي قطعة نقود أو تجربة رمي زهر النرد، فإذا رغبنا في توليد أعداد عشوائية ثنائية بشكل (صفر أو

الواحد)، فمثلًا إذا ظهرت صورة يعد العدد المولد وهو (الصفر)، وإذا ظهرت كتابة يعد العدد المولد هو (واحد).

### 2.3.2. جداول الأعداد العشوائية *Tables of random numbers:*

هي جداول خاصة تم الحصول عليها من خلال قياسات طبيعية لكثير من ظواهر البيانات، وبصورة خاصة الجداول الإحصائية لتوزيعات قياسية موجودة في كتب جداول إحصائية، أو بصورة مبسطة في أغلب الكتب الإحصائية، ويمكن الاستفادة منها للحصول على أعداد عشوائية وفق سياقات معينة.

### 3.3.2. طريقة التربيع الأوسط *The mid square method:*

تعود فكرة هذه الطريقة إلى الباحثين المعروفين (Neumann و Metropolis) وذلك بحدود عام 1946، وهي من أوائل الطرائق المقترحة للاستعمال مع الحواسيب الرقمية، وتتلخص فكرة الطريق، بصورة خوارزمية عمل، على النحو الآتي:

1) اختر العدد الابتدائي الذي يبدأ بالتوليد ($X_0$)، يطلق عليه عادة اسم (العدد البذرة The seed number) الذي هو عبارة عن عدد صحيح مؤلف من (d) من المراتب العشرية.
2) احسب مُرَبع هذا العدد $(X_0)^2$.
3) اقطع (25%) من طرفي العدد الناتج في الخطوة (ب).
4) فيكون المقدار الأوسط هو العدد العشوائي الجديد، وليكن ($X_1$).

5) تكرر الخطوات من الخطوة (2) إلى الخطوة (4) للحصول على الأعداد العشوائية ($i = 1,2,3 \dots ,n$).

من **سلبيات** هذه الطريقة:

1- أنها بطيئة التوليد لكثرة العمليات الحسابية المرافقة لعملية التوليد.
2- كما أنها تضمحل بسرعة عندما يكون العدد المُوَلَّد يساوي صفرًا.
3- يضاف إلى ذلك أنها ذات دورة قصيرة عادة.
4- ثبات العدد المولد، ولا يمكن بعد ذلك إجراء عملية التربيع.

***مثال (2-2):*** لنأخذ عدد البذرة التالي: $X_0 = 8234$

المطلوب كتابة خوارزمية لطريقة التربيع الأوسط لتوليد (n) من الأعداد العشوائية؟

**الجواب:**

لتوليد (n) من الأعداد العشوائية والمؤلف كل منها من (d) من الرتب العشرية بطريقة التربيع الأوسط، فإن الخوارزمية تكون كما يلي:

1- اختيار العدد البذرة ($X_0 = 8234$)، ل($d=4$) من المراتب العشرية.
2- احتساب مربع عدد البذرة $(X_0^2 = (8234)^2 = 67798756)$

*ملاحظة:* سيتم الحصول على (2d) من المراتب العشرية.

3- أخذ (d=4) من المراتب العشرية الواقعة في منتصف العدد المولد في الخطوة 2، وذلك بقطع (25%) من طرفي العدد الجديد (تربيع عدد البذرة).

4- العدد الجديد يكون ($X_1 = 7987$).

5- تكرر الخطوات من الخطوة 2 إلى الخطوة 4 للحصول على الأعداد العشوائية (... n i = 1,2,3).

### 4.3.2. طريقة المضروب الأوسط *The mid product method:*

إنَّ هذه الطريقة مشابهة لطريقة التربيع الأوسط باختلاف أمر واحد فقط هو أنَّ العدد المولد الجديد نحصل عليه من الصيغة وعلى النحو الآتي:

$$X_i = K * X_{i-1} \ , \ i = 1, 2, \dots, n \qquad \dots (3.2)$$

إذ إنَّ k هو عدد صحيح موجب.

ويمكن كتابة خوارزمية لإيجاد (n)، من الأعداد العشوائية والمؤلفة لكل منها (d) من المراتب العشرية بطريقة المضروب الأوسط على النحو الآتي:

1- نختار العدد البذرة ($X_0$)، وعدد صحيح موجب (K)، ثابت لكل عملية تكرار، وكل منهما مؤلف من عدد من المراتب العشرية.

2- نستعمل المعادلة (3.2) للحصول على ($X_i$) والمؤلف من (2d) من المراتب العشرية.

3- اقطع (25%) من طرفي العدد الناتج في الخطوة (2).

4- فيكون المقدار الأوسط هو العدد العشوائي الجديد وليكن ($X_1$).

5- تكرر الخطوات من الخطوة (2) الى الخطوة (4) للحصول على الأعداد العشوائية ($n\ i = 1,2,3 \dots$).

أ- ان الأعداد المولّدة بهذه الطريقة لا تنجح عادة في اختبار عشوائية الأعداد Test of Randomness.

ب- ان طول الدورة يعتمد على قيمة العدد البذرة $X_o$.

ت - تتميز هذه الطريقة بالتحيز، اذ تقترب الأعداد المولّدة من الصفر نتيجة التربيع. مثلا لو كانت d=2 و $X_o$=03 لذا فان $X_0^2 = 0009$ مما يؤدي إلى اختيار $X_1$=00، وبالنتيجة سوف تكون جميع الأعداد التالية بالتوليد أصفاراً.

**الجواب:**

لتوليد (n) من الأعداد العشوائية والمؤلف كل منها من (d) من الرتب العشرية بطريقة المضروب الاوسط، فإن خطوات الخوارزمية تكون على النحو الآتي:

1- اختيار العدد البذرة ($X_0 = 8234$)، ل(d=4) من المراتب العشرية والقيمة الثابتة (K=6666).

2- احتساب مربع عدد البذرة باستعمال المعادلة الآتية:

$$X_i = K * X_{i-1} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(X_1 = K * X_0 = 6666 * 8234 = 54887844)$$

**ملاحظة:** سيتم الحصول على (2d) من المراتب العشرية، السبب قيمة K الثابتة كبير.

3- أخذ (d=4) من المراتب العشرية الواقعة في منتصف العدد المولد في الخطوة (2)، وذلك بقطع (25%) من طرفي العدد الجديد ($X_1$).

4- العدد الجديد يكون ($X_1 = 8878$).

5- تكرر الخطوات من الخطوة (2) إلى الخطوة (4) للحصول على الأعداد العشوائية (n i = 1,2,3 ...).

**٥- طريقة فيبوناسي Fibonacci Method:**

ان العدد المولّد $X_{i+1}$ وفق هذه الطريقة يتم توليده من العلاقة الآتية:

$$X_i = (X_{i-1} + X_{i-2}) \bmod m \qquad ; i=3,4,5,\ldots \qquad (5\text{-}5)$$

اذ ان $X_1$ و $X_2$ هما عددا بذرة يجب تحديدهما وان m هي عبارة عن معلمة Parameter، عادة تكون m عدداً كبيراً.

من سلبيات هذه الطريقة ان الأعداد المولّدة يكون بينها ترابط ذاتي، مما يعني وجود ترابط (اعتماد) بين الأعداد المولّدة، مما يضعف الخاصة العشوائية المفروضة في هذه الأعداد.

***مثال (2-4):*** اكتب برنامجًا لتوليد (n=25) عددًا عشوائيًّا بطريقة فيبوناسي عندما تكون (m=100)، مستعملًا العددين البذرة ($X_1 = 1$) و ($X_2 = 1$)، ثم احسب المتوسط للأعداد المولده؟

بتطبيق العلاقة (٥-٥) نجد ان الأعداد المولّدة سوف تكون على النحو الآتي:

{2,3,5,8,13,21,34,55,89,44,33,77,10,87,97,84,81,65,46,11,57,68,25 ,93, 18}.

أما حاسوبيا فان البرنامج الآتي يقوم بعملية توليد n من الأعداد العشوائية بطريقة فيبوناسي .

```
clc
clear all
m=100;
n=25;
X=zeros(n+2,1);
X(1)=1;
X(2)=1;
for i=3: n+2
    X(i)=mod(X(i-1)+X(i-2),m);
end
```

```
disp('X = ');
disp(X);
M_X=mean(X);
disp('M_X =');
disp(M_X);
```

دالة ( )zeros: هي دالة لتوليد متجه (أو مصفوفة) جميع عناصره (عناصرها) أصفار.

شرح البرنامج:

يوجد لدينا عددان بذرة هما X1 و X2 حسب المعادلة (2.2) لطريقة توليد فيبوناسي، في برنامج الماتلاب تسلسل ترتيب المتجه X يبدأ من 1 وليس الصفر، أي إن X1 يكون ضمن موقع X(1)، وهكذا لباقي المواقع القيم.

## 4.2. دالة التوليد ( )rand:

- إن الإيعاز (( )rand) هو إيعاز يعطي قيمة عشوائية بين الصفر والواحد، أو أي مجال يتحدد من قبل المبرمج إذا استعمل كدالة.

إن توليد القيم العشوائي بواسطة الدالة (( )rand)، الذي يمثل العدد العشوائي البذرة العام (The seed random number generation)، والتي تكون صيغتها على النحو الآتي:

$$rand(m,n)$$

إذ إن m, n مجال المصفوفة.

❖ يمكن توليد القيم العشوائية الصحيحة باستعمال الدالة (( )randn)، والتي تكون صيغتها على النحو الآتي:

$$randn(K, m, n)$$

إذ إن K يمثل أكبر قيمة (عدد) يمكن للدالة توليدها عشوائيًا.

***ملاحظة:*** في كل مرة يتم فيها استدعاء الدالة (( )rand) أو(( )randn) يتم تغيير حالة التوليد ويتم إنشاء تسلسل جديد من الأرقام العشوائية.

هناك ($2^{1492}$) حالة من الأرقام العشوائية، ($2^{32}$) حالة منها تحدد بأرقام صحيحة، فيمكن تحديد حالة من الحالات العشوائية من خلال الإيعازين:

$$rand('state', N)$$
$$randn('state', N)$$

إذ إن:

(N) رقم صحيح في الفترة المغلقة [ 0 ، $2^{32}$-1 ]، وبذلك يتم تهيئة الإيعاز لتوليد حالة واحدة فقط من الحالات العشوائية من دون تكرار غيرها وحسب الرقم الصحيح (N).

state: لتحديد الحالة التي تمثل القيم العشوائية.