Proof:

1) $(\bigcup_{r\in I} A_r)' = \bigcap_{r\in I} A_r'$

Let $x \in (\bigcup A_r)' \iff r \in S$ and $r \notin \bigcup_{r\in I} A_r$ من تعريف المتمم

$\iff x \in S$ and $r \notin A_r$ for all $r \in I$

$\iff x \in A_r'$ for all $r \in I$

$\implies x \in \bigcap_{r\in I} A_r'$

$\therefore (\bigcup_{r\in I} A_r)' = \bigcap_{r\in I} A_r'$

2) $(\bigcap_{r\in I} A_r)' = \bigcup_{r\in I} A_r'$

Let $x \in (\bigcap A_r)' \iff x \in S$ and $x \notin \bigcap_{r\in I} A_r$ تعريف المتمم

$\iff x \in S$ and $x \notin A_r$ for some $r \in I$

$\iff x \in A_r'$ for some $r \in I$

$\iff x \in \bigcup_{r\in I} A_r'$

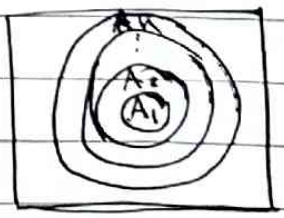
$\therefore (\bigcap_{r\in I} A_r)' = \bigcup_{r\in I} A_r'$

(*) Increasing sequences متتابعات متزايدة

A sequence of sets $\{A_r\}, r=1,2,\dots,n$ is said to be increasing (or non-decreasing) if $A_r \subset A_{r+1}$ for each $r$.

يمكن القول بأن المتتابعة من المجموعات $A_r$ حيث $r=1,2,\dots,n$ هي متزايدة اذا كانت $A_r$ (اي مجموعة) هي مجموعة جزئية من المجموعة التي تليها $A_{r+1}$ اي

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n$$




$\therefore \bigcup_{r\in I} A_r = A_n$ الاتحاد سوف يمثل اكبر مجموعة وهي $A_n$

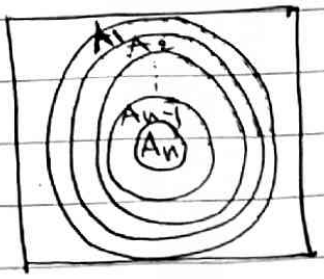
$\bigcap_{r\in I} A_r = A_1$ التقاطع يمثل اصغر مجموعة وهي $A_1$

## ⊛ Decreasing Sequences متتابعات متناقصة

A sequence of sets $\{A_r\}$, $r=1,2,\dots$ is said to be decreasing (or non-increasing) if $A_r \supset A_{r+1}$ for each $r$.

يمكن القول بأن المتتابعة من المجموعات $A_r$ حيث $r=1,2,\dots$ هي متتابعة متناقصة (او غير متزايدة) اذا كانت $A_{r+1}$ مجموعة جزئية من المجموعة التي قبلها أي

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n$$




$\therefore \bigcup_{r\in I} A_r = A_1$ الاتحاد سوف يمثل المجموعة الاولى

$\bigcap_{r\in I} A_r = A_n$ التقاطع يمثل المجموعة الاخيرة

EX: (1)

Let $I=\{1,2,\dots,n\}$ (اذا كان الدليل (المؤشر $I$) يأخذ القيم $1,2,\dots,n$)

$A_r = \{x : 1 < x < 1+\frac{1}{r}\}$ و ان المجموعة $A_r$ تعرف بـ $r\in I$

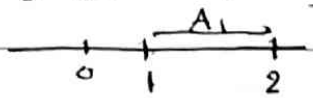
Find $\bigcup_{r\in I} A_r$ and $\bigcap_{r\in I} A_r$ اوجد اتحاد $A_r$ وتقاطع $A_r$

Sol:

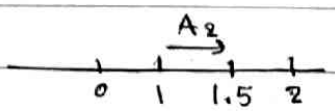
نحاول ايجاد 3 مجموعات على الاقل لكي نلاحظ طبيعة هذه المتتابعة

اي عندما $r=1,2,3$

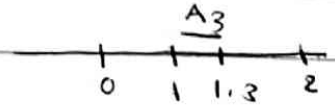
$$A_1 = \{1 < x < 1+\frac{1}{1}\} = \{1 < x < 2\}$$




$$A_2 = \{1 < x < 1+\frac{1}{2}\} = \{1 < x < 1.5\}$$




$$A_3 = \{1 < x < 1+\frac{1}{3}\} = \{1 < x < 1.33\}$$




$$A_n = \{1 < x < 1+\frac{1}{n}\}$$

$\therefore \bigcup_{r\in I} A_r = A_1$ وهي المجموعة الكبرى والتي تحتوي على جميع المجموعات الاخرى

$\bigcap_{r\in I} A_r = A_n$ وهي المجموعة الاصغر والتي تكون مشتركة مع جميع المجموعات الاخرى

14) Classes of sets: فئات المجموعات

Frequently the elements of a set are sets themselves.
في كثير من الاحيان عناصر المجموعات هي مجموعات من نفسها.

EX: (1)

$A = \{\{2,3\}, \{4,5\}, \{6\}\}$

EX: (2)

Consider the class اعتبر ان A هي المعرفة بشكل كالاتي
$A = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{6\}\}$ which statements are incorrect and why? اي الجمل خاطئة ولماذا.

① $\{3,4\} \subset A$ ✗ $\{1,2\}$ is element of A but not set لان $\{1,2\}$ هي عنصر في A وليست مجموعة

② $\{3,4\} \in A$ ✓ لان $\{1,2\}$ عنصر

③ $\{\{3,4\}\} \subset A$ ✓ لان العنصر $\{1,2\}$ وضع بين قوسين $\{\{1,2\}\}$ الحصرين فتحول الى صيغة المجموعة.

15) Power of the set: قوة المجموعة

Power of the set A is denoted by $\tilde{P}(A)$, is the set of all subset of the set A, it contains $2^n$ subset, where n is number of elements in A.

قوة المجموعة A يرمز لها بالرمز $\tilde{P}(A)$ وهي مجموعة كل المجموعات الجزئية المتكونة من المجموعة A وتحتوي على $2^n$ من المجموعات الجزئية حيث (n) تمثل عدد عناصر المجموعة A.

EX: (1)

If $A = \{1,2,3\}$, find $\tilde{P}(A)$

Sol:

$2^n = 2^3 = 8$ ∴ عدد عناصر A هو 3 فالعدد المجموعات الجزئية هو $2^3$.

$\therefore \tilde{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \phi\}$

EX: (2)
If $A=\{a,b,1,2\}$, find $\tilde{P}(A)$

Sol:
$n=4$ عدد عناصر المجموعة A
$\therefore 2^4=16$ (عدد عناصر قوة المجموعة) عدد المجموعات الجزئية لـ A

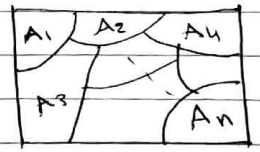
$\tilde{P}(A)=\{\{a\},\{b\},\{1\},\{2\},\{a,b\},\{a,1\},\{a,2\},\{b,1\},\{b,2\},\{1,2\},\{a,b,1\},\{a,b,2\},\{a,1,2\},\{b,1,2\},\{a,b,1,2\},\phi\}$

16) Partition of a set A: تجزئة المجموعة A (تقسيم المجموعة)
Partition of a set A into a non-empty subset which are disjoint and whose union is A. The subsets in a partition are called cells.

تجزئة المجموعة A هي مجموعات جزئية غير خالية، اذ تكون ① غير مترابطة ② ناتج اتحادها يمثل المجموعة A.

① $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$ المجموعات الجزئية داخل التقسيم تدعى بالخلايا.

② $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$




EX: (1)
Consider the following classess of $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ are partition or not? (classes التنوية) لنفرض ان لدينا المجموعات الجزئية للمجموعة A. هل هذه المجموعات هي تجزئة ام لا؟

① $C_1=\{\{0,1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$
② $C_2=\{\{0,1,2\},\{3,4,7\},\{5,6\}\}$
③ $C_3=\{\{0,1,2\},\{2,3,4\},\{5,6,7\}\}$

Sol:
$C_1$ is not partition of A, because $7 \in A$ does not belong to any cell. $C_1$ ليست تقسيم للمجموعة A لان العنصر 7 لا ينتمي الى اي خلية

$C_2$ is partition of A because $A_i \cap A_j = \phi$ and $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A$
$C_2$ هي تقسيم لانها حققت الشرطين بانها جميع الخلايا غير مترابطة وان اتحادهم ينتج المجموعة A

EX:(2)

Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$, Find five partition of A.

Sol:

$C_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

$C_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

$C_3 = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$

$C_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$

$C_5 = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$