مثال:

ولد ارقام عشوائية تتبع التوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = 2$، بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1]. قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.

	R	x
1	0.944749	1.44793
2	0.808217	0.82570
3	0.215339	0.12125
4	0.282337	0.16588
5	0.149876	0.08119
6	0.306695	0.18314
7	0.493914	0.34052
8	0.951257	1.51060
9	0.778437	0.75352
10	0.406761	0.26108
11	0.518260	0.36518
12	0.061377	0.03167
13	0.529861	0.37736
14	0.922619	1.27951
15	0.401311	0.25651
16	0.420398	0.27271
17	0.126698	0.06774
18	0.853377	0.95995
19	0.119882	0.06385
20	0.443977	029347

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 0.482937$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0.475740$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$Var\ (x) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$SD = 0.5$$

التوزيع الطبيعي:

لعدم وجود صيغة التحويل المعكوس للتوزيع الطبيعي، فقد تم اقتراح الصيغة الاتية للتوزيع الطبيعي القياسي $Z{\sim}N(0,1)$، وكالاتي:

$$Z = F^{-1}(R) \approx \frac{R^{0.135} - (1-R)^{0.135}}{0.1975}$$

اذ ان R هي الارقام العشوائية التي تتوزع وفق التوزيع المنتظم القياسي [0, 1].

مثال: بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي، ولد ارقام عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي القياسي، ثم قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.

i	R_i	$\frac{R^{0.135}-(1-R)^{0.135}}{0.1975}$
1	0.131410	-1.11802
2	0.821256	0.91732
3	0.108956	-1.23133
4	0.050361	-1.64577
5	0.664476	0.42222
6	0.913328	1.36216
7	0.958269	1.73666
8	0.410070	-0.22590
9	0.836781	0.97873
10	0.247305	-0.67983
11	0.500671	0.00167
12	0.273975	-0.59778
13	0.218581	-0.77384
14	0.728001	0.60371
15	0.108815	-1.23209

$$\bar{Z}=\frac{\sum Z_i}{n}=0.03338$$

$$SD=\sqrt{\frac{\sum(z_i-\bar{z})^2}{n-1}}=1.05009$$

الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري هما الـ 0 والـ 1 على التوالي، ويلاحظ ان هناك اختلاف بسيط ناتج عن صغر حجم العينة فضلاً عن ان صيغة التوليد هي تقريبيه وليست دقيقة تماما.

التوزيع الطبيعي:

تستخدم الصيغة الاتية لغرض توليد ارقام عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي بالوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ.

$$\mu+\sigma Z$$

مثال:

كون عينة عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي بالوسط الحسابي *3* والانحراف المعياري *7* بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي، ثم قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة.

الحل: لغرض ايجاد عينة عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي بالوسط الحسابي *3* والانحراف المعياري *7* لابد من توليد ارقام عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي القياسي ومن ثم ايجاد الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع الطبيعي.

R	$Z = \dfrac{R^{0.135} - (1-R)^{0.135}}{0.1975}$	$\mu + \sigma Z$ $3 + 7Z$
0.862902	1.09152	10.6407
0.626323	0.32013	5.2409
0.172149	-0.94296	-3.6007
0.329464	-0.43883	-0.0718
0.459674	-0.10059	2.2959
0.566941	0.16749	4.1724
0.174779	-0.93266	-3.5287
0.619558	0.30242	5.1169
0.074504	-1.44468	-7.1128
0.044646	-1.70439	-8.9308
0.979189	2.04698	17.3289
0.040438	-1.75156	-9.2610
0.456234	-0.10920	2.2356
0.595835	0.24103	4.6872
0.619386	0.30197	5.1138
0.725302	0.59562	7.1693
0.167608	-0.96100	-3.7270
0.645340	0.37052	5.5936
0.870313	1.12630	10.8841
0.451512	-0.12104	2.1527

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 2.32$$

$$S.D = 6.87$$

توزيع ويبل Weibull Distribution

يستخدم توزيع ويبل كنموذج لازمنة الفشل لماكنة او مكونات الكترونية. ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل هي:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} y^{\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}} & y \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

اذ ان $\alpha > 0$ تمثل معلمة القياس، $\beta > 0$ تمثل معلمة الشكل. لغرض توليد بيانات تتبع توزي ويبل، نتبع الخطوات الاتية:

ينسب هذا التوزيع الى الفيزيائي السويدي Waloddi Weibull الذي اشتق واستعمل هذا التوزيع عام 1939 في دراسة خصائص العدد المنتجة صناعياً . وكذلك استعرض KAO عام 1958 استعمالات

هذا التوزيع في دراسة المعولية Reliability Study كما ان لهذا التوزيع استعمالات مهمة في الرقابة الى الجودة وفيما يلي تعريف هذا التوزيع .

اما بالنسبة لدالة التوزيع فتأخذ الصيغة الاتية

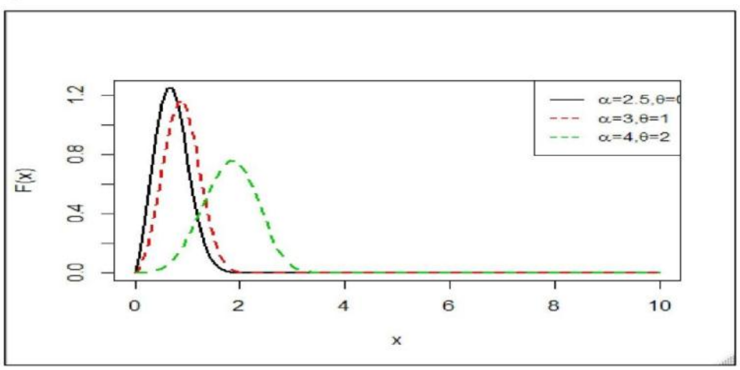
$$R = 1 - e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

حيث ان :

β : معلمة الشكل

α: معلمة القياس

حيث ان α , β تمثلان معلمتي التوزيع وان $\alpha, \beta > 0$ واذا كانت $\beta = 1$ سوف يختزل التوزيع الى التوزيع الاسي . وان معلمات توزيع ويبل لها تأثير على شكل دالة الكثافة الاحتمالية كما موضح في الاشكال ادناه :



شكل ( ) يوضح تأثير معلمة القياس على شكل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل

د. عمر سالم - المحاكاة

مثال:

1. ولد 10 ارقام عشوائية تتبع التوزيع المنتظم القياسي بالفترة [0, 1] باستخدام التطابق الخطي بالاستناد الى المعطيات الاتية $a = 5, c = 7, m = 16, x_0 = 3$.
2. بالاستناد الى الارقام التي تم توليدها في الفقرة (1)، ولد ارقام عشوائية تتبع توزيع ويبل بالمعلمتين $\alpha = 3$، $\beta = 2$، ثم قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.

الحل:

i	$x_i = (ax_i + c) mod\ m$	$R_i = \frac{x_i}{m}$
1	3	0.1875
2	6	0.3750
3	5	0.3125
4	0	0.000
5	7	0.4375
6	10	0.6250
7	9	0.5625
8	4	0.2500
9	11	0.6875
10	14	0.8750

.2

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} y^{\beta-1} e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}} & y \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

نوجد دالة التوزيع التجميعية

$$F(Y) = 1 - e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad y \geq 0$$

$$R = F(Y) = 1 - e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

نوجد قيمة Y بدلالة R، وكالاتي:

$$R = 1 - e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

$$1 - R = e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

$$-\ln(1 - R) = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}$$

$$[-\ln(1 - R)]^{\frac{1}{\beta}} = \frac{y}{\alpha}$$

$$\alpha[-\ln(1 - R)]^{\frac{1}{\beta}} = y$$

i	R_i	$y_i = \alpha[-\ln(1-R)]^{\frac{1}{\beta}}$
1	0.1875	1.36702
2	0.3750	2.05670
3	0.3125	1.83637
4	0.000	0.0000
5	0.4375	2.27558
6	0.6250	2.97110
7	0.5625	2.72766
8	0.2500	1.60908
9	0.6875	3.23548
10	0.8750	4.32608

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n\, n!}$$

$$\pi = 3.14$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1.772$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0.88623$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = 1.33$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = 2.24051$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = 1.17807$$

$$E(Y) = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = 3\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3\,\frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{4^n\,n!} = 3\,\frac{(2)!\sqrt{\pi}}{4*1!} = \frac{3\sqrt{3.14}}{2} = 2.66$$

$$Var(Y) = \alpha^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]$$

$$Var(Y) = 3^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{2}\right) - (0.8862)^2\right]$$

$$Var(Y) = 3^2\,[1 - 0.7855] = 1.9318$$

$$\sigma = 1.3899$$

التوزيعات المثلثية (*Triangular Distribution*):

يقال بان المتغير العشوائي Y يتوزع وفق التوزيع المثلثي بالمعلمات $Y \sim [a, b, c]$ اذا كانت له دالة الكثافة الاحتمالية الاتية:

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2(y-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \le y \le b \\ \dfrac{2(c-y)}{(c-a)(c-b)}, & b < y \le c \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

وان $a \le b \le c$

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le a \\ \dfrac{(y-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & a \le y \le b \\ 1 - \dfrac{(c-y)^2}{(c-a)(c-b)}, & b < y \le c \\ 1, & y > c \end{cases}$$

اذ ان $-\infty < a < \infty$ يمثل اقل قيمة للمتغير العشوائي Y، وان

$-\infty < c < \infty$ يمثل اكبر قيمة للمتغير العشوائي Y، وان

$-\infty < b < \infty$ يمثل المنوال للمتغير العشوائي Y.

الاتي هو التوقع والتباين للتوزيع المثلثي:

$$E(Y) = \frac{a+b+c}{3}$$

$$Var(Y) = \frac{(a^2+b^2+c^2)-(ab+ac+bc)}{18}$$

مثال:

1. ولد 10 ارقام عشوائية تتبع التوزيع المنتظم القياسي بالفترة [0, 1] باستخدام التطابق الخطي بالاستناد الى المعطيات الاتية $\mathrm{a} = 5, \mathrm{c} = 7, \mathrm{m} = 16, \mathrm{x}_0 = 3$.
2. بالاستناد الى الارقام التي تم توليدها في الفقرة (1)، ولد ارقام عشوائية تتبع التوزيع المثلثي $Y \sim [0, 1, 2]$، ثم قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.

الحل:

ان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y، $Y \sim [0, 1, 2]$، هي

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y \le 1 \\ 2-y, & 1 < y \le 2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

وان الدالة التوزيعية التجميعية هي

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{y^2}{2}, & 0 \le y \le 1 \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{2}, & 1 < y \le 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

$$R = F(y) = \frac{y^2}{2}$$

$$R = \frac{y^2}{2}$$

$$y^2 = 2R$$

$$y = \pm\sqrt{2R}, \quad y = \sqrt{2R}, \quad 0 \le R \le \frac{1}{2}$$

$$R = 1 - \frac{(2-y)^2}{2}$$

$$\frac{(2-y)^2}{2} = 1 - R$$

$$(2-y)^2 = 2(1-\mathrm{R})$$

$$(2-y) = \sqrt{2(1-\mathrm{R})}$$

$$y = 2 - \sqrt{2(1-\mathrm{R})}, \quad \frac{1}{2} < R \le 1$$

i	$R_{[0,1]}$	$R_{0\le x\le 0.5} = R_{[0,1]}(b-a)+a = R_{[0,1]}(0.5-0)+0$	$R_{0.5<x\le 1} = R_{[0,1]}(b-a)+a = R_{[0,1]}(1-0.5001)+0.5001$	$y=\sqrt{2R}$ اذ ان $R_{0\le x\le 0.5}$	$y = 2-\sqrt{2(1-\mathrm{R})}$ اذ ان $R_{0.5<x\le 1}$
1	0.1875	0.09375	0.593848	0.433013	1.09872
2	0.3750	0.18750	0.687596	0.612372	1.20955
3	0.3125	0.15625	0.656347	0.559017	1.17096
4	0.000	0.0000	0.500100	0.0000	1.00010
5	0.4375	0.21875	0.718846	0.661438	1.25013
6	0.6250	0.31250	0.812594	0.790569	1.38778
7	0.5625	0.28125	0.781344	0.750000	1.33870
8	0.2500	0.12500	0.625097	0.5	1.13409
9	0.6875	0.34375	0.843843	0.829156	1.44115
10	0.8750	0.43750	0.937591	0.935414	1.64670

i	x_i
1	0.433013
2	0.612372
3	0.559017
4	0.0000
5	0.661438
6	0.790569
7	0.750000
8	0.5
9	0.829156
10	0.935414
11	1.09872
12	1.20955
13	1.17096
14	1.00010
15	1.25013
16	1.38778
17	1.33870
18	1.13409
19	1.44115
20	1.64670

$$E(Y) = \frac{a+b+c}{3} = \frac{0+1+2}{3} = 1$$

$$Var(Y) = \frac{(a^2+b^2+c^2)-(ab+ac+bc)}{18}$$

$$Var(y) = \frac{(0^2+1^2+2^2)-(0+0+2)}{18} = 0.1666$$

$$\sigma = 0.4082$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = 0.937443$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}} = 0.406114$$