2.1.2 Permutations: التباديل

An arrangement of a set of n different objects in a given order is called a permutation of the objects (taken all at time).

لترتيب مجموعة n من الأشياء المختلفة بشكل معين، تسمى مثل هذه الحالة بالتباديل لتلك الأشياء (تؤخذ كل الأشياء في آن واحد).

an arrangement of any $r \leq n$ of these objects in a given order is called an r-permutation or a permutation of the n objects taken r at a time, and is denoted by P_r^n or ${}^nP_r$ or $P(n,r)$.

الترتيب لأي $r \leq n$ من الأشياء معطاة بترتيب معين تسمى بالتباديل. لـ n من الأشياء مأخوذة من r من الأشياء في وقت واحد ويرمز لهذه التباديل بـ P_r^n أو ${}^nP_r$ أو $P(n,r)$. وصيغتها هي

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , r \leq n, \quad 0 \leq r \leq n \quad , n, r \text{ are integer.}$$

عدد صحيح

Remarks: ملاحظات

① If $r = n$ then

$$P_r^n = n! \quad , \quad P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \quad \text{when} \quad 0! = 1$$

② If $r > n$ then

$$P_r^n = 0$$

لأنه لا يمكن اختيار عدد من الأشياء من عدد أقل منه من الأشياء.

③ If $r = 0$ then

$$P_r^n = 1 \quad , P_0^n = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

④ If repetition is allowed then

$$P_r^n = n^r$$

⑤ The number of permutations of n objects of which n_1 are like, n_2 are like, ..., n_K are like is

عدد التباديل لـ n من الأشياء عندما يكون هناك n_1 من الأشياء المتشابهة و n_2 و ... و n_K من الأشياء المتشابهة

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_K}^n = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_K!} \quad , \quad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_K$$

27

EX: (1) وعاء يحوي على 8 كرات ، اوجد عدد العينات المرتبة ذات الحجم (3).

suppose an urn contains 8 balls. Find the number of ordered samples of size 3.

1) with replacement. 2) without replacement.

1) $8 \cdot 8 \cdot 8 = 8 \times 8 \times 8 = 8^3 = 512$ بارجاع

2) $8 \cdot 7 \cdot 6 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

or $P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$

EX: (2)

There are 6 roads between A and B and 4 roads between B and C. (4) و B و A توجد (6) طرق بين مدينتين طرق بين B و C.

1) In how many ways can one drive from A to C by way of B? بكم طريقة يمكن لسائق الذهاب من A إلى C مروراً بـ B

2) In how many ways can one drive from A to C and back to A, passing through B on both trips? رحلة بكم طريقة يمكن لسائق الذهاب من A الى C والرجوع الى A مروراً بـ B في كلا الرحلتين (الذهاب والرجوع)

3) In how many ways can one drive the circular trip described in (2) without using the same road more than once? رحلة بكم طريقة يمكن لسائق الذهاب بنفس الرحلة الموصوفة في الفقرة (2) بدون استخدام نفس الطريق اكثر من مرة واحدة.

Sol:

1) $6 \cdot 4 = 6 \times 4 = 24$ (6) عدد الطرق الممكن استخدامها $A \to B$ (4) $(B \to C)$

2) $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ 6×4 $A \to B \to C$ الذهاب والرجوع يمكن لهما نفس العدد و هي
4×6 $C \to B \to A$

3) $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 360$ الذهاب عن طريقة والرجوع عن طريقة أخرى

$A \to B \to C$, $C \to B \to A$

6×4 ذهاب 3×5 إيجاد طريقة الذهاب

EX: (3)

1) Find the number of distinct permutations that can be formed from all of the letters of the word ELEVEN. (ELEVEN) اوجد عدد التباديل الممكن تكوينها من جميع احرف كلمة

عدد الكلمات التي تبدأ وتنتهي بالحرف E

2) How many of them begin and end with E ?

3) How many of them have the 3 E's together? عدد الكلمات التي تحتوي على الاحرف الثلاثة (EEE) سوياً

4) How many begin with E and end with N ? عدد الكلمات التي تبدأ بـ (E) وتنتهي بـ (N)

5) = = = = L = = = N ?

Sol:

① $P^6_{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!1!1!1!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = 120$ (E) ثلاث مرات

* يوجد لدينا في الكلمة ثلاث احرف متكررة وثلاث احرف مختلفة

$n=6$

$n_1 = n(E) = 3 \quad n_2 = n(L) = 1 \quad n_3 = n(N) = 1$

② [1][4][3][2][1][1] $= 4!$

③ $4! = 24$ or $4 \cdot 3! = 4! = 24$

④ [1] $4!$ [1] $= 12$

$\frac{4!}{2!}$ تقسيم على عدد الاحرف المتكررة

EX: Find n if :

① $P(n,2) = 72$ ② $P(n,4) = 42\, P(n,2)$

③ $2P(n,2) + 50 = P(2n,2)$

① $P(n,2) = 72$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 72$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

either $n-9=0 \Rightarrow n=9$ ✓

or $n+8=0 \Rightarrow n=-8$ مرفوض

② $P(n,4) = 42\, P(n,2)$

$$\left[\frac{n!}{(n-4)!} = 42\,\frac{n!}{(n-2)!}\right] \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{1} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{1} = 42$$