المحاضرة السابعة الاشتقاق العددي(تتمة الموضوع):

امتداد تايلر Taylor’s Expansion:

لتكن $f\left(x\right)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق بشكل مستمر على الفترة $\left[x, x+\Delta x\right]$ (أي ان المشتقة الثانية موجودة , والمشتقة الثالثة أيضا موجودة,وهكذا).عندئذ يمكن تقدير قيمة الدالة f عند النقطة $x+\Delta x$ بشكل تقريبي باستخدام مايسمى بامتداد تايلر Taylor’s Expansion وكالاتي:

$$f\left(x+\Delta x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\Delta x\right)^{k}}{k!}\frac{d^{k} f\left(x\right)}{\mathrm{dx}^{k}}$$

$$=\frac{\left(\Delta x\right)^{0}}{0!} f\left(x\right)+\frac{\left(\Delta x\right)^{1}}{1!} f'\left(x\right)+\frac{\left(\Delta x\right)^{2}}{2!} f''\left(x\right)+\frac{\left(\Delta x\right)^{3}}{3!} f'''\left(x\right)+..$$

$$= f\left(x\right)+\Delta x f'\left(x\right)+\frac{\left(\Delta x\right)^{2}}{2} f''\left(x\right)+\frac{\left(\Delta x\right)^{3}}{6} f'''\left(x\right)+......$$

حيث ان $\frac{d^{k} f\left(x\right)}{d\mathrm{x}^{k}}$ تمثل المشتقة (k) للدالة f بالنسبة ل x فمثلا عندما $k=3$, يكون لدينا المشتقة الثالثة أي ان

$$\frac{d^{3} f\left(x\right)}{d\mathrm{x}^{3}}= f'''\left(x\right)$$ وان

$$k!=k\times\left(k-1\right)\times\left(k-2\right)\times\left(k-3\right)\times....\times 2\times 1$$

مقارنة الدقة (Accuracy) في طرق الفروق المقسومة عند تقدير مشتقة الدالة :

Comparison of (Accuracy) in the methods of dividing differences when estimating the derivative of a function:

سيتم في الفقرات الاتية مناقشة سبب الاختلاف في تقدير قيمة المشتقة بين طرق الفروق المقسومة الثلاثة التي تم التطرق اليها في المحاضرة الخامسة (طريقة الفروق المقسومة المتقدمة , التراجعية والمركزية).

دقة تقدير المشتقة باستخدام طريقة الفروق المقسومة المتقدمة :

Accuracy of estimation of a derivative using the forward divded difference method:

افرض ان $f\left(x\right)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق بشكل مستمر على الفترة $\left[x, x+\Delta x\right]$, حيث ان Δx هي مقدار صغير نسبيا .عندئذ . وباستخدام امتداد تايلر ,يمكن كتابة الدالة f عند النقطة $x+\Delta x$ كالاتي:

$$f\left(x+\Delta x\right)=f\left(x\right)+\Delta x f'\left(x\right)+\frac{\left(\Delta x\right)^2}{2!}f''\left(x\right)+\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!}f'''\left(x\right)+\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow f\left(x+\Delta x\right)=f\left(x\right)+\Delta x f'\left(x\right)+O\left(\left(\Delta x\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}-\frac{O\left(\left(\Delta x\right)^2\right)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}-O\left(\Delta x\right)\ldots\ldots..(1)$$

حيث ان الحد $O\left(\Delta x\right)$ يمثل جميع الحدود المضروبة ب Δxفي امتداد تايلر , وكذلك فان $O\left(\left(\Delta x\right)^2\right)$يمثل جميع الحدود المضروبة ب $\left(\Delta x\right)^2$في امتداد تايلر , وهكذا, وان الحرف O الكبير (يقرا BigO) , يمثل اختصارا لكلمة order وتعني الرتبة .وتعني $O\left(\Delta x\right)$ ان جميع الحدود المضروبة بالمقدار Δxستقترب من الصفر (او تصبح صغيرة جدا بحيث يمكن اهمالها) وذلك عندما $\Delta x \rightarrow 0$.

لاحظ ان المعادلة رقم (1) أعلاه هي الصيغة نفسها المستخدمة في تقدير قيمة المشتقة باستخدام طريقة الفروق المقسومة المتقدمة . وان الحد $O\left(\Delta x\right)$هنا يمثل مقدار الخطا الذي سنقع به عند تقدير قيمة المشتقة بهذه الطريقة .

دقة تقدير المشتقة باستخدام طريقة الفروق المقسومة التراجعية:

Accuracy of estimation of a derivative using the backward divded difference method:

افرض ان $f\left(x\right)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق بشكل مستمر على الفترة $\left[x-\Delta x, x\right]$, حيث ان Δx هي مقدار صغير نسبيا . عندئذ , وباستخدام امتداد تايلر , يمكن كتابة صيغة مشتقة الدالة $f\left(x\right)$ كالاتي :

$$f\left(x-\Delta x\right)= f\left(x\right)+\left(-\Delta x\right) f'\left(x\right)+\frac{\left(-\Delta x\right)^{2}}{2!} f''\left(x\right)+\frac{\left(-\Delta x\right)^{3}}{3!} f'''\left(x\right)+......$$

$$\Rightarrow f\left(x-\Delta x\right)= f\left(x\right)-\Delta x f'\left(x\right)+O\left(\left(\Delta x\right)^{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(x+\Delta x\right)}{\Delta x}+\frac{O\left(\left(\Delta x\right)^{2}\right)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(x+\Delta x\right)}{\Delta x}+O\left(\Delta x\right)........(2)$$

لاحظ ان المعادلة رقم (2) أعلاه هي الصيغة نفسها المستخدمة في تقدير المشتقة باستخدام طريقة الفروق المقسومة التراجعية .وان الحد $O\left(\Delta x\right)$ هذا يمثل مقدار الخطا الذي سنقع به عند تقدير قيمة المشتقة بهذه الطريقة .

دقة تقدير المشتقة باستخدام طريقة الفروق المقسومة المركزية:

Accuracy of estimation of a derivative using the central divded difference method:

افرض ان $f\left(x\right)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق بشكل مستمر على الفترة $\left[x-\Delta x, x+\Delta x\right]$حيث ان Δx هي مقدار صغير نسبيا عندئذ, وباستخدام امتداد تايلر , يمكن كتابة الدالة f عند النقطتين $x+\Delta x$ و $x-\Delta x$ وكالاتي:

$$x+\Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \ldots\ldots$$

$$x-\Delta x) = f(x) + (-\Delta x) f'(x) + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \ldots\ldots$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) \pm \ldots\ldots$$

وبطرح المعادلتين أعلاه نحصل على :

$$f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) = 2\Delta x f'(x) + 2\times O\left((\Delta x)^3\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{2\times O\left((\Delta x)^3\right)}{2\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} - O\left((\Delta x)^2\right) \ldots\ldots(3)$$

لاحظ ان المعادلة رقم (3) أعلاه هي الصيغة نفسها المستخدمة في تقدير المشتقة باستخدام طريقة الفروق المقسومة المركزية .وان الحد $O\left((\Delta x)^2\right)$ هذا يمثل مقدار الخطا الذي سنقع به عند تقدير قيمة المشتقة يهذه الطريقة.

مما تقدم يتضح لنا يان الخطا الذي ستقع به عند تقدير قيمة المشتقة باستخدام طريقتي الفروق المقسومة المتقدمة والتراجعية مساو ل $O(\Delta x)$.وهو مقدار ضئيل يقترب من الصفر بالسرعة نفسها التي يقترب فيها Δx من الصفر فيما كان مقدار الخطا سنقع يه عند تقدير قيمة المشتقة باستخدام طريقة القروق

المقسومة المركزية مساو ل $O\left(\left(\Delta x\right)^2\right)$,وهو مقدار اصغر بكثير من $O\left(\Delta x\right)$, حيث يقترب الى الصفر بشكل متسارع جدا مقارنة Δx او $O\left(\Delta x\right)$ لاحظ انه كانت $\Delta x = 0.01$ فان $\left(\Delta x\right)^2 = 0.0001$.

لذلك فان دقة التقدير باستخدام طريقة الفروق المقسومة المركزية افضل بكثير من الطريقتين الاخريين ويمكن ملاحظة ذلك من مقارنة نتائج تقدير قيمة المشتقة بتطبيق الطرق الثلاثة على المثال الذي تطرقنا له في المحاضرة الخامسة وكما في ادناه :

Example:

Estimate the value of the derivative of the following function using the three dividing difference methods that we discussed in the sixth lecture when x=3, $\Delta x = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$

Δx	(FDD) $f'\left(x\right)$	(BDD) $f'\left(x\right)$	(CDD) $f'\left(x\right)$
0.1	291.3571	250.7734	271.0652
0.05	280.4363	260.173	270.3046
0.025	275.1787	265.0506	270.1147
0.01	272.0869	268.0361	270.0615

لاحظ ان القسمة الحقيقية للمشتقة هي :

$$f'\left(x\right) = 2\frac{d}{dx}e^{1.5x}$$

$$= 2(1.5e^{1.5x}) = 3e^{1.5x}$$

$$f'\left(3\right) \quad = 270.0514$$

حيث نلاحظ ان طريقة الفروق المركزية حققت نتائج قريبة جدا من القيمة الحقيقية مقارنة بنتائج الطريقتين الاخرين بغض النظر عن قيمة Δx .