توليد الأرقام العشوائية:

الأرقام العشوائية هي عنصر أساسي وضروري في محاكاة جميع الأنظمة المنفصلة (المتقطعة)، وان معظم لغات الكمبيوتر تقريبا لها روتين فرعي او دالة تولد ارقاما عشوائية.

الأرقام العشوائية المنتظمة هي ارقام عشوائية مستقلة، تتبع التوزيع المنتظم للفترة [0،1]، وتكون متاحة بشكل عام كدالة مدمجة

خصائص الأرقام العشوائية المنتظمة:

ان اي سلسلة من الأرقام العشوائية يجب ان يكون لها الخصائص الإحصائية الاتية:

1. ان تكون منتظمة
2. الاستقلالية

ان كل رقم عشوائي هو عينة مستقلة مسحوبة من التوزيع المنتظم المستمر بالفترة (0, 1). وان دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع هي:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ for} & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (1)$$

ان صيغة المعادلة (1.1) هي مشابهة للصيغة الاتية، عندما $a = 0$ و $b = 1$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ for } a \le x \le b \qquad (2)$$

ان القيمة المتوقعة لاي رقم عشوائي R_i والذي يتوزيع وفق التوزيع (1) هي الاتي:

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

وان التباين هو

$$\mathrm{var}(R) = \int_0^1 x^2\,dx - [\mathrm{E}(R)]^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

تستخدم تقنية التحويل المعكوس في توليد عينات لتوزيعات مختلفة، اذ يمكن توليد عينات للتوزيع الأسي، المنتظم، ويبول، والتوزيع المثلثي والتوزيعات التجريبية .فضلا عن ذلك، يمكن توليد عينات لمجموعة واسعة من التوزيعات المنفصلة. في جميع هذه التوزيعات، تستند عملية توليد العينات العشوائية الى التوزيع المنتظم القياسي [0, 1].

(التوليد من التوزيع المنتظم (U(a,b

مثال:

1. اوجد الصيغة العامة لتوليد ارقام عشوائية تتبع التوزيع المنتظم بالفترة [a, b]

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$

2. بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1]. ولد ارقام عشوائية تتبع التوزيع المنتظم بالفترة [2, 5] قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.

الحل:

.1

$$F(x) = \int_a^X f(t)dt = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(X) = R = \frac{x-a}{b-a}$$

$$R = \frac{x - a}{b - a}$$

$$R(b - a) = X - a$$

$$X = R(b - a) + a$$

2. توليد ارقام عشوائية تتبع التوزيع المنتظم بالفترة [2, 5].

	R	X
1	0.944749	4.83425
2	0.808217	4.42465
3	0.215339	2.64602
4	0.282337	2.84701
5	0.149876	2.44963
6	0.306695	2.92009
7	0.493914	3.48174
8	0.951257	4.85377
9	0.778437	4.33531
10	0.406761	3.22028
11	0.518260	3.55478
12	0.061377	2.18413
13	0.529861	3.58958
14	0.922619	4.76786
15	0.401311	3.20393
16	0.420398	3.26119
17	0.126698	2.38009
18	0.853377	4.56013
19	0.119882	2.35965
20	0.443977	3.33193

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 3.46030$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0.8888$$

$$E(x) = \int_a^b x\, f(x) dx = \int_a^b x\, \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{b+a}{2} = \frac{5+2}{2} = 3.46030$$

$$\sigma^2 = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{(5-2)^2}{12} = 0.75$$

$$\sigma = 0.866$$

ملاحظة تفاصيل حساب CDF و التوقع والتباين للتوزيع

$$F(x) = P(X < x) = \int_a^{x_s} f(u)du = \int_a^{x_s} \frac{1}{b-a} du = \frac{1}{b-a}\left[u\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

حيث: $a \le x \le b$.

a) توقعه الرياضي:

$$E(X)=\int_a^b xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$\Rightarrow E(X)=\frac{a+b}{2}$$

c) تباينه:

$$V(X)=\int_a^b (x-E(x))^2 f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{12}$$

a. التوزيع الاسي (Exponential distribution):

يستخدم التوزيع الأسي عادة في المسائل المتعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة المكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة الشحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة.

للتوزيع الاسي دالة الكثافة الاحتمالية الاتية:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\, e^{-\lambda x} & , \quad x\geq 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

وان الدالة التوزيعية التجميعية (CDF) هي

$$F(x)=\int_{-\infty}^{X} f(t)dt=\begin{cases}1-\ e^{-\lambda x} & , \quad x\geq 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

اذ ان λ معلمة التوزيع، اذ ان $\lambda>0$،

ويمكن ان تفسر المعلمة λ على انها الوسط الحسابي لعدد الحالات التي تظهر في فترة زمنية معينة. على سبيل المثال، اذا كان زمن الانتظار بين وصولين متتالين $X_1, X_2, X_3, \ldots$ تتبع

التوزيع الاسي بمعدل مقداره λ، فان λ يمكن ان تفسر على انها الوسط الحسابي لوصول الوحدات خلال وحدة زمنية محددة، او معدل الوصول الوحدات. عليه فان

$$E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$$

عليه فان $\frac{1}{\lambda}$ هي زمن الانتظار بين وصولين متتالين (فترة الانتظار بين وصولين متتالين). ان الهدف هو تطوير إجراء لتوليد القيم $X_1, X_2, X_3, \ldots$ التي لها توزيع أسي. يمكن استخدام تقنية التحويل المعكوس، على الأقل من حيث المبدأ، لاي توزيع، ولكنها مفيدة للغاية عندما تكون التوزيع الاحتمالي التجميعي، $F(x)$ ذات شكل بسيط بحيث يمكن حساب المعكوس، F^{-1} ، بسهولة.

اجراءات خطوة خطوة الإجراء الخاص بتقنية التحويل المعكوس، الموضحة بالتوزيع الأسي، يتكون من الخطوات التالية:

1. حساب التوزيع الاحتمالي التجميعي للمتغير العشوائي المراد توليد الارقام العشوائية X، فيما يتعلق بالتوزيع الاسي فان $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$.
2. ضع $F(X) = R$ ضمن حدود قيم X. فيما يتعلق بالتوزيع الاسي، فان $R = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$.

X هو متغير عشوائي، وكذلك فان $1 - e^{-\lambda x}$ هي متغير عشوائي، وهي تساوي R. وان R متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1].

3. حل المعادلة $F(X) = R$ لايجاد قيمة X بدلالة R.

فيما يتعلق بالتوزيع الاسي، فان خطوات الحل هي:

$$R = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - R$$

$$-\lambda X = \ln(1 - R)$$

$$X = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - R) \qquad (1)$$

يطلق على المعادلة (1) المولد العشوائي للتوزيع الاسي. بشكل عام تكتب المعادلة (1) بالصيغة الاتية:

$$X = F^{-1}(R)$$

ومن خلالها يتم توليد سلسلة من القيم وكما موضح في الخطوة 4

الخطوة 4: يتم توليد ارقام تتبع التوزيع المنتظم القياسي وبعدد معين بحسب ما مطلوب $R_1, R_2, R_3, \ldots$ ومن ثم يتم حساب المتغير العشوائي الذي يتوزع وفق التوزيع الاسي

$$X = F^{-1}(R)$$

$$F^{-1}(R) = X = \frac{-1}{\lambda}\ln(1 - R)$$

مثال:

ولد ارقام عشوائية تتبع التوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = 1$، بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1]. قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.

$$F^{-1}(R) = X = \frac{-1}{\lambda}\ln(1 - R)$$

	R	x
1	0.944749	2.89587
2	0.808217	1.65139
3	0.215339	0.24250
4	0.282337	0.33176
5	0.149876	0.16237
6	0.306695	0.36629
7	0.493914	0.68105
8	0.951257	3.02118
9	0.778437	1.50705
10	0.406761	0.52216

11	0.518260	0.73035
12	0.061377	0.06334
13	0.529861	0.75473
14	0.922619	2.55901
15	0.401311	0.51301
16	0.420398	0.54541
17	0.126698	0.13547
18	0.853377	1.919895
19	0.119882	0.12770
20	0.443977	0.58695

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 0.965874$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0.951478$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1$$

$$Var\ (x) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال:

ولد ارقام عشوائية تتبع التوزيع الاسي بالمعلمة $\lambda = 2$، بالاستناد الى الاتي من الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي [0, 1]. قارن بين الوسط الحسابي والانحراف المعياري للارقام المولدة مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري النظري.