المحاضرة السادسة : الاشتقاق العددي

التعريف التقليدي للمشتقة (Traditional definition of derivative):

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق عند النقطة x, عندئذ تعرف مشتقة $f(x)$ (يرمز لها $f'(x)$ $\dfrac{df(x)}{dx}$) على انها نسبة التغير في قيمة الدالة $f(x)$ الى التغير في قيمة المتغير x صغير جدا رياضيا:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\,.........(1)$$

Example:

For $f(x)=5x^2$, and from our previous knowledge of the laws of differentiation, the derivative of this function is:

$$f'(x)=5(2x)=10x$$

والان سنستخدم التعريف أعلاه (المعادلة رقم 1) لايجاد المشتقة :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5(x+\Delta x)^2-5(x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5\left(x^2+(\Delta x)^2+2x\Delta x\right)-5(x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5x^2+5(\Delta x)^2+10x\Delta x-5(x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5(\Delta x)^2+10x\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}5\Delta x+10x=0+10x=10x$$

هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام قوانين الاشتقاق .

في بعض الأحيان يكون إيجاد المشتقة بالطرق الاعتيادية صعبا او مستحيلا لذلك نلجا الى الطرق العددية .
سنستعرض في الفقرات الاتية بعضا من طرق تقدير المشتقات عدديا.

1-طريقة الفروق المقسومة المتقدمة Forward divided differences(FDDs):

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق عند النقطة x, عندئذ تعرف المشتقة $f'(x)$ وكالاتي:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وهو نفس تعريف المشتقة السابق لكن بدون غاية (أي بدون $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$) يسمى الكسر الأخير بالفرق المقسوم المتقدم Fordward divided difference(FDDs) .

Example:

Estimate the value of the derivative of the following function using the forward divided difference method when x=3 and $\Delta x = 0.1$.

$$f(x) = 2e^{1.5x}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f'(x=3) &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(3+0.1) - f(3)}{0.1} \\ &= \frac{f(3.1) - f(3)}{0.1} \\ &= \frac{2e^{1.5\times 3.1} - 2e^{1.5\times 3}}{0.1} = 291.3571 \end{aligned}$$

القيمة الأخيرة هي القيمة التقديرية لمشتقة الدالة عندما x=3 و $\Delta x = 0.1$ وذلك وفقا لطريقة الفروق المقسومة المتقدمة.

لاحظ ان الدالة أعلاه يمكن اشتقاقها بالطرق المتعارف عليها وكالاتي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} 2e^{1.5x}$$

$$= 2\left(1.5e^{1.5x}\right) = 3e^{1.5x}$$

$$f'(3) = 3e^{1.5\times 3} = 270.0514$$

والقيمة الاخيرة هي القيمة الحقيقية لمشتقة الدالة عندما x=3.

فاذن يكون خطا التقدير المطلق كالاتي

Absolute Error = |270.0514-291.3571|=21.3057

لاحظ ان التقدير للمشتقة أعلاه يتاثر بقيمة Δx ,وبالتالي فان الأخطاء ايضا تتاثر ,لذلك فانه عند تغير قيمة Δx ستتغير قيمة التقدير . الجدول الاتي يبين الاختلافات الحاصلة في القيمه المفدرة للمشتقة والخطا المطلق عند تغير قيمة Δx.

Δx	$f'(x)$ (FDD)	Absolute error
0.1	291.3571	21.3057
0.05	280.4363	10.3849
0.025	275.1787	5.1273
0.01	272.0869	2.0355

2- طريقة الفروق المقسومة التراجعية Backward Divided Differences(BDD)

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق عند النقطة x , عندئذ يمكن تقدير المشتقة $f'(x)$ كالاتي :

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

يسمى الكسر الأخير بالفرق المقسوم التراجعي Backward Divided Differences (BDD) :

Example:

Estimate the value of the derivative of the following function using the Backward Divided Differences method when x=3 , $\Delta x = 0.1$

الحل:

$$f'(x=3) \approx \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(3) - f(3-0.1)}{0.1}$$
$$= \frac{f(3) - f(2.9)}{0.1}$$
$$= \frac{2e^{1.5\times 3} - 2e^{1.5\times 2.9}}{0.1} = 250.7734$$

القيمة الأخيرة هي القيمة التقديرية لمشتقة الدالة عندما x=3 و Δx =0.1 وذلك وفقا لطريقة الفروق المقسومة التراجعية .

تذكر ان القيمة الحقيقية للمشتقة عندما x=3 هي $f'(x=3) = 270.0514$ اذا بالإمكان حساب الخطا المطلق كالاتي:

Absolute Error = |270.0514-250.7734|=19.2780

وكما سبق ان لاحظنا , فان دقة التقدير تعتمد على قيمة Δx . الجدول ادناه يبين الاختلافات الحاصلة في القيمة المقدرة للمشتقة والخطاين المطلق والنسبي عند تغير قيمة Δx :

Δx	$f'(x)$ (BDD)	Absolute error
0.1	250.7734	19.2780
0.05	260.173	9.8784
0.025	265.0506	5.0008
0.01	268.0361	2.0153

3- طريقة الفروق المقسومة المركزية Central Divided Difference (CDDs):

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق عند النقطة x عندئذ يمكن تقدير المشتقة $f'(x)$ كالاتي:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

يسمى الكسر الأخير بالفرق المقسوم المركزي Central Divided Difference (CDD)

Example:

Estimate the value of the derivative of the following function using the Central Divided Differences method when x=3 , $\Delta x = 0.1$

الحل

$$f(x) = 2e^{1.5x}$$

$$\begin{aligned} f'(x=3) &\approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \\ &= \frac{f(3+0.1) - f(3-0.1)}{2\times 0.1} \\ &= \frac{f(3.1) - f(2.9)}{0.2} \\ &= \frac{2e^{1.5\times 3} - 2e^{1.5\times 2.9}}{0.2} = 271.0652 \end{aligned}$$

القيمة الأخير هي القيمة التقديرية لمشتقة الدالة عندما $x = 3$ و $\Delta x = 0.1$ وذلك وفقا لطريقة الفروق المقسومة المركزية.

وفي هذه الحالة تكون قيمة الخطا المطلق كالاتي :

Absolute Error = |270.0514-271.0652 |=1.0138

واضح ان قيم الأخطاء في هذه الطريقة اقل بكثير من قيم الأخطاء في الطرق السابقة عند قيمة $\Delta x = 0.1$ الجدول ادناه يبين قيم الأخطاء المطلقة والنسبية عند قيم مختلفة ل Δx :

Δx	$f'(x)$(CDD)	Absolute error
0.1	271.0652	1.0138
0.05	270.3046	0.2532
0.025	270.1147	0.0633
0.01	270.0615	0.0101

Homework:

Calculate the value of the derivative of the function below using the three methods described above

$$f(x) = \sqrt{x}$$

at the point $x = 3, \Delta x = 0.1$ then calculate the absolute error for each method, knowing that the real derivative is: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$