**بحوث العمليات:** هي استخدام الاساليب العلمية لتنظيم تعاون الانشطة والعمليات ضمن نطاق معين ،بهدف الوصول الى الحل الامثل او الحلول المثلى لمشكلات هذا النظام من بين عدد من الحلول الممكنة.يرجح البعض اكتشاف اساليب بحوث العمليات الى ما بعد الثورة الصناعية اذ كانت الحاجة قائمة الى تطوير اساليب العمل والإنتاج ،وكما يرى بعض المهتمين الى ان اكتشاف اساليب بحوث العمليات يرجع الى جهود عالم البدالة الانكليزي(Erlang،1908) عندما ساهم في اكتشاف وتطوير نظرية الطوابير.بينما يعزى البعض الاخر الى ان اكتشاف بحوث العمليات كان ولادة حية لمخاض الحرب العالمية الثانية ومن اهم النتائج هو تطوير انموذج رياضي اطلق انموذج البرمجة الخطية.

تطور انموذج البرمجة الخطية بدءا" من منتصف القرن العشرين وبالتحديد منذ عام 1950 عندما اصبحت من اهم الاساليب التي تلجأ اليها الشركات في سبيل تعظيم ارباحها أو تقليل كلف الانتاج ،وهي على العموم تستخدم لتخصيص الموارد ،العمل،المواد الاولية،المكائن ورأس المال وبأفضل تخصيص أي أن نموذج **البرمجة الخطية** :هي اسلوب رياضي لمعالجة الانظمة الخطية يهدف الى تحقيق الأمثلية والذي بموجبه يتم تخصيص الموارد المحدودة من أجل تحقيق الهدف .

هناك العديد من الاسباب التي ادت الى استخدام البرمجة الخطية ومنها:

1- الانواع الكثيرة من المسائل في الحقول المختلفة يمكن التعبير عنها او على الاقل تقريبها كنماذج خطية

2- توافر الاساليب الكفوءة لحل مسائل البرمجة الخطية

3- التغير في البيانات موضع البحث يمكن ان يعالج في نماذج البرمجة الخطية باستخدام تحليل الحساسية.

4- توافر العديد من البرامج الجاهزة لحل نماذج البرمجة الخطية

تستخدم البرمجة الخطية نماذج رياضية لتصف المشكلة ذات العلاقة الخطية اي ان جميع الدوال الرياضية في هذا النموذج يتطلب ان تكون دوالا" خطية .

وبشكل عام يمكن كتابة نموذج البرمجة الخطية وفق الصيغة الاتية:

$$\text{Max } Z = \sum C_j X_j \quad , \qquad j=1,..n$$

$$\text{OR } \text{Min } Z = \sum C_j X_j$$

$$\text{S.T. } \sum a_{ij} X_j \geq b_i \quad , \qquad i=1,..,m$$

$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i$$

$$\sum a_{ij} X_j = b_i$$

$$\text{for all } X_j \geq 0$$

## 1-2: تكوين أنموذج البرمجة الخطية
## Formulation of Linear Programming Model

لتكوين أنموذج البرمجة الخطية (L.P.) يتم إتباع الآتي:

1. تحديد متغيرات القرار (القرارات المتغيرة) وغالبا ما تكون هو الشيء المطلوب تحديده في المشكلة قيد البحث ويعبر عنها برموز جبرية.
2. تحديد قيود المشكلة وغالبا ما تكون الموارد المتاحة في المشكلة قيد البحث والتي يعبر عنها بمتباينات أو متساويات وجميعها تكون خطيه.
3. تحديد داله الهدف، المعادلة التي تقيس لنا الربح (تعظيم) أو الكلفة ( تقليل).

وكل المتغيرات في القيود يجب إن تمثل في داله الهدف وكل متغير له معامله.

والأمثلة الآتية توضح الخطوات في أعلاه:

**مثال (1-1):** معمل للجلود يقوم بإنتاج نوعين من الحقائب الجلدية هما A وB، إنتاج حقيبة واحدة من نوع A يحتاج إلى 2 متر من الجلود و3 ساعات عمل أسبوعية بينما إنتاج حقيبة واحده من النوع B يحتاج إلى متر واحد من الجلود وساعتي عمل أسبوعية، ربح الحقيبة الواحدة من نوع A هو 300 دينار وربح الحقيبة الواحدة من

نوع B هو 200 دينار مع العلم إن كميه الجلود الأسبوعية المتوفرة هي 100 متر مع ساعات عمل أسبوعية مقدارها 120 ساعة.

كون أنموذج برمجة خطية (L.P.) لإيجاد عدد الحقائب المنتجة أسبوعيا" من النوعين A و Bلتعظيم الربح الأسبوعي للمعمل ؟

**الحل:**

يجب إنتاج نوعين من الحقائب هما A و Bبحيث نحصل على أقصى ربح ممكن،الخطوة الأولى تتمثل بتحديد متغيرات القرار والتي تمثل عدد الحقائب المنتجة من النوعين وكالآتي:

$\chi_1$: عدد الحقائب المتوقع إنتاجها من النوع A.

$\chi_2$ : عدد الحقائب المتوقع إنتاجها من النوع B.

بعد إن تم تحديد متغيرات القرار نحدد قيود المسألة، في هذه الحالة القيود محدده بالمتاح من الموارد (الجلود، ساعات العمل) فإنتاج حقيبة واحدة من النوع A يتطلب 2 متر من الجلود

وبما إن $\chi_1$ يمثل عدد الحقائب المنتجة من A لذلك فإن كميه الجلود المطلوبة لإنتاج الحقائب نوع A هي $2\chi_1$ وبصورة مشابهة بالنسبة إلى إنتاج الحقائب من نوع B حيث تتطلب $\chi_2$ من الجلود وهكذا فإن مجموع كميه الجلود المطلوبة لإنتاج النوعين A و B هي:

$$2\chi_1+\chi_2$$

والذي يجب إن لا يتجاوز كميه الجلود المتاحة والتي هي 100 متر ولذلك فإن قيد الجلود يكون بالصورة الآتية:

$$2\chi_1+\chi_2 \leq 100$$

أما بالنسبة إلى الوقت فإن إنتاج حقيبة واحدة من النوع A يتطلب 3 ساعات عمل أسبوعية أي إن الوقت المتطلب لإنتاج الحقائب نوع A هو $3\chi_1$ وكذلك فإن الوقت المتطلب لإنتاج الحقائب نوع B هو $2\chi_2$ وعليه فإن الوقت المتطلب لإنتاج الحقائب من النوعين A وB هو:

$$3\chi_1 + 2\chi_2$$

و الذي يجب إن لا يتجاوز ساعات العمل الأسبوعية المتمثلة بـ 120 ساعة لذلك فإن قيد ساعات العمل يكون بالصورة الآتية:

$$3\chi_1 + 2\chi_2 \leq 120$$

إن إنتاج الحقائب لأي من النوعين يأخذ احتمالين أما إن تنتج أو لا تنتج في حلة كون الربح العائد من إنتاجها قليل مقارنة مع النوع الآخر وكذلك الموارد المتطلبة لنتاجها تكون أكثر من الموارد المتطلبة لإنتاج النوع الآخر وهذا يعني إن إنتاج نوع واحد من الحقائب يعود على المعمل بربح أكثر من إنتاج النوعين وعلى هذا الأساس فإن إنتاج أي نوع من الحقائب يجب إن يكون أكبر أو يساوي صفر وهذا ما يسمى بقيود عدم السالبية أي:

$$\chi_1 \geq 0 \quad ; \quad \chi_2 \geq 0$$

الخطوة الأخيرة في تكوين الأنموذج تتمثل بتحديد الهدف الذي يسعى إليه متخذ القرار وهو في هذه المسألة يمثل تعظيم الربح اليومي للمعمل الذي يتمثل بالربح الناتج من إنتاج الحقائب نوع A وهو $300\chi_1$ زائداً الربح الناتج من إنتاج الحقائب نوع B وهو $200\chi_2$ ولذلك فإن الربح الإجمالي للإنتاج يساوي $300\chi_1 + 200\chi_2$ ولنفترض إن $Z = 300\chi_1 + 200\chi_2$ فإن

الهدف هو تعظيم Z لتكون أكبر ما يمكن لذلك فإن دالة الهدف ( objective function) تكتب بالصورة الآتية:

$$\text{Max} \quad Z = 300\chi_1 + 200\chi_2$$

ولذلك فإن مسألة البرمجة الخطية(L.P.) النهائية تكون بالصورة الآتية:

$$\text{Max} \quad Z = 300\chi_1 + 200\chi_2$$

S.T

$$2\chi_1 + \chi_2 \leq 100$$

$$3\chi_1 + 2\chi_2 \leq 120$$

$$\chi_1 \text{ ،} \chi_2 \geq 0$$

وبصورة عامة فإن صيغة دالة الهدف تكون كآلاتي:

$$\text{Max or Min} \quad Z = c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots c_n\chi_n$$

حيث إن:

Z : قيمه دالة الهدف

$c_1$ : ربح أو كلفة المتغير الأول (معامل المتغير الأول)

$c_2$ : ربح أو كلفة المتغير الثاني (معامل المتغير الثاني)

⋮

$c_n$: ربح أو كلفة المتغير (n) (معامل المتغير n )

في هذه المثال تكون داله الهدف عبارة عن تعظيم أرباح المنتجين من الحقائب A وB.

**مثال (1-2):** شركه مواد غذائية تقوم بإنتاج نوعين من المواد الغذائية A وB ويتطلب إنتاج النوعين ثلاثة أنواع من المواد الأولية I ، II، III، إنتاج أي وحدة واحدة من المواد الغذائية لأي من النوعين يتطلب كميه من المواد الأولية وكما مبين في الجدول (1-1):

الجدول(1-1)

| | A | B |
|---|---|---|
| I | 2 | 3 |
| II | 1 | 2 |
| III | 3 | 1 |

إن مقدار ما متوفر من المواد الأولية نوع I هو 40 كغم يومياً ومقدار ما متوفر من المواد الأولية نوع II هو 20 كغم يومياً ومقدار ما متوفر من المواد الأولية نوع III هو 30 كغم يومياً ما هو عدد الوحدات المنتجة اليومية من نوعي المواد الغذائية A وB بحيث يؤدي إلى تعظيم معدل الربح اليومي للشركة علماً إن ربح الوحدة الواحدة من النوع A هو 20 دينار وربح الوحدة الواحدة من النوع B هو 25 دينار.

**الحل:**

**الخطوة الأولى** لتكوين أنموذج البرمجة الخطية (L.P.) هو تحديد متغيرات القرار (decision variable) والتي تمثل عدد الوحدات المنتجة يومياً من النوعين A وB وكالآتي:

$\chi_1$ : عدد الوحدات المتوقع إنتاجها من النوع A.

$\chi_2$: عدد الوحدات المتوقع إنتاجها من النوع B.

**الخطوة التالية** هي تحديد قيود أنموذج البرمجة الخطية (L.P.) والتي تمثل الأنواع الثلاثة للمواد الأولية حيث إن الوحدة الواحدة من النوع A تحتاج إلى 2 من المواد الأولية نوع I وعليه فإن الكمية المتطلبة من المواد الأولية I لإنتاج النوع A هو $2\chi_1$وكذالك فإن الكمي المتطلبة من المواد الأولية I لإنتاج النوع B هي $3\chi_2$ وكذلك فإن إجمالي الكميه المتطلبة من المواد الأولية I لإنتاج النوعين A وB هي:

$$2\chi_1 + 3\chi_2$$

و التي يجب إن لا تتجاوز مقدار ما متوفر من المواد الأولية I والذي يمثل 40 كغم لذلك فإن قيد المواد الأولية I يكون بالصورة الآتية:

$$2\chi_1 + 3\chi_2 \leq 40$$

وبصورة مشابهة فإن الوحدة الواحدة من النوع A تحتاج إلى ما مقداره 1 من المواد الأولية

نوع II لذلك فإن الكمية المتطلبة من المواد الأولية II لإنتاج النوع A هي $\chi_1$وكذالك فإن الكميه المتطلبة من المواد الأولية II لإنتاج النوع B هي $2\chi_2$ وعليه فإن إجمالي الكميه المتطلبة من المواد الأولية II لإنتاج النوعين A وB هي:

$$\chi_1 + 2\chi_2$$

و التي يجب إن لا تتجاوز مقدار ما متوفر من المواد الأولية II ( 20 كغم ) ولذلك فإن قيد المواد الأولية II يكون بالصورة الآتية:

$$\chi_1 + 2\chi_2 \leq 20$$

وبنفس أسلوب القيدين السابقين فإن الوحدة الواحدة من النوع A تحتاج إلى ما مقداره 3 من المواد الأولية نوع III لذلك فإن الكميه المتطلبة من المواد الأولية

III لإنتاج النوع A هي $3\chi_1$ وكذلك فإن الكميه المتطلبة من المواد الأولية III لإنتاج النوع B هي $\chi_2$ وعليه فإن إجمالي الكميه المتطلبة من المواد الأولية III لإنتاج النوعين A ، B هي:

$$3\chi_1 + \chi_2 \leq 30$$

هذا بالإضافة إلى قيود عدم السالبية

$$\chi_1 \geq 0 \; ; \; \chi_2 \geq 0 \; ; \; \chi_3 \geq 0$$

بعد إن تم تحديد متغيرات القرار ومن ثم تحديد قيود أنموذج البرمجة الخطية(L.P.) يتطلب الأمر تحديد دالة الهدف والتي تمثل تعظيم معدل الربح اليومي للشركة الناتج من ربح إنتاج النوع A وهو $20\chi_1$ زائداً الربح الناتج من إنتاج النوع B وهو $25\chi_2$ وعليه فإن داله الهدف تكون بالصورة الآتية:

$$\text{Max } Z = 20\chi_1 + 25\chi_2$$

ولذلك فإن مسألة البرمجة الخطية النهائية (L.P.) تكون بالصورة الآتية:

$$\text{Max } Z = 20\chi_1 + 25\chi_2$$

S.T

$$2\chi_1 + 3\chi_2 \leq 40$$
$$\chi_1 + 2\chi_2 \leq 20$$
$$3\chi_1 + \chi_2 \leq 30$$
$$\chi_2 \geq 0, \chi_1$$

**مثال (1-3):** شركة تقوم بإنتاج أربع أنواع من الدراجات الهوائية (D,C,B,A) تملك الشركة خطين إنتاجيين ولإنتاج أي نوع من الأنواع الأربعة يجب إن يمر خلال هذين الخطين، إنتاج الدراجة الهوائية(A) تتطلب 2 ساعة عمل للخط الإنتاجي الأول و 3 ساعات عمل للخط الإنتاجي الثاني بينما إنتاج الدراجة الهوائية(B) يتطلب ساعة عمل واحدة للخط الإنتاجي الأول و 4ساعات عمل للخط الإنتاجي الثاني وإنتاج

الدراجة الهوائية(C) يتطلب 2 ساعة عمل للخط الإنتاجي الأول و 2 ساعة عمل للخط الإنتاجي الثاني وإنتاج الدراجة الهوائية (D) يتطلب 3 ساعات عمل للخط الإنتاجي الأول و 4 ساعات عمل للخط الإنتاجي الثاني، مقدار ما متوفر من ساعات العمل الأسبوعية للخطين الإنتاجيين هي 150 ساعة عمل للخط الأول و 120ساعة عمل للخط الثاني، تبيع الشركة الدراجة الهوائية(A) بمبلغ 15 ألف دينار وكلفة إنتاجها تبلغ 13 ألف دينار أما الدراجة الهوائية (B ) فتباع بمبلغ 17 ألف دينار وكلفة إنتاجها تبلغ 14.5 ألف دينار بينما الدراجتين الهوائيتين(D,C) فتباع بمبلغ 22 ألف دينار وكلفة إنتاجها تبلغ 18.5 ألف دينار هذا بالإضافة إلى إن كلفة نقل الدراجات الهوائية من الشركة إلى المنافذ التسويقية تكون على حساب الشركة وهي ألف دينار للدراجة الهوائية (A) و 500 دينار للدراجة الهوائية(B) و500 دينار للدراجة الهوائية( C) و1500 دينار للدراجة الهوائية(D)، المطلوب تكوين أنموذج برمجة خطية(.L.P) للتوصل إلى كمية الإنتاج الأسبوعي لكل نوع من أنواع الدراجات والذي يؤدي إلى تعظيم أرباح الشركة.

**الحل:**

متغيرات القرار للمسألة تمثل عدد الدراجات الهوائية المنتجة أسبوعاً للأنواع الأربعة وكالآتي:

$\chi_1$: عدد الدراجات الهوائية المتوقع إنتاجها من النوع A.

$\chi_2$: عدد الدراجات الهوائية المتوقع إنتاجها من النوع B.

$\chi_3$: عدد الدراجات الهوائية المتوقع إنتاجها من النوع C.

$\chi_4$: عدد الدراجات الهوائية المتوقع إنتاجها من النوع D.

بعد إن تم تحديد متغيرات القرار يتم تحديد قيود المسألة والتي تمثل ساعات العمل الأسبوعية للخطين الإنتاجيين وكالآتي:

(الخط الإنتاجي الأول) $2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3 + 3\chi_4 \leq 150$

$3\chi_1 + 4\chi_2 + 2\chi_3 + 4\chi_4 \leq 120$ (الخط الإنتاجي الثاني)

هذا بالإضافة إلى قيود عدم السالبية:

$$\chi_1 \geq 0 \; ; \; \chi_2 \geq 0 \; ; \; \chi_3 \geq 0 \; ; \; \chi_4 \geq 0$$

أما دالة الهدف للمسألة فإنها تمثل صافي الربح الناتج من بيع الدراجة الهوائية وللأنواع الأربعة وهو يستخرج وفق المعادلة الآتية:

صافي الربح= سعر بيع الدراجة – (كلفة الإنتاج + كلفة النقل)

وعليه فإن صافي الربح للأنواع الأربعة من الدراجات الهوائية يكون:

صافي الربح للدراجة الهوائية (A) $= 1 \quad 15-(13+1)$

صافي الربح للدراجة الهوائية (B) $= 2 \quad 17-(14.5+0.5)$

صافي الربح للدراجة الهوائية (C) $= 3 \quad 22-(18.5+0.5)$

صافي الربح للدراجة الهوائية (D) $= 2 \quad 22-(18.5+1.5)$

ولذلك فإن الصيغة النهائية لدالة الهدف تكون بالصورة الآتية:

$$\text{Max} \quad Z = \chi_1 + 2\chi_2 + 3\chi_3 + 2\chi_4$$

والصيغة النهائية لأنموذج البرمجة الخطية(L.P.) تكون بالصورة الآتية:

$$\text{Max} \quad Z = \chi_1 + 2\chi_2 + 3\chi_3 + 2\chi_4$$

S.T

$$2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3 + 3\chi_4 \leq 150$$

$$3\chi_1 + 4\chi_2 + 2\chi_3 + 4\chi_4 \leq 120$$

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \geq 0$$

**مثـــال (1-4):** شركه لمنتجات الألبان تقوم بإنتاج نوعين من القيمر، يتطلب من الشركة إنتاج ما لا يقل عن 500 وحدة يومياً من النوع الأول و 1000 وحدة يومياً من النوع الثاني و 2000 وحدة من النوعين يومياً، كلفة إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول تبلغ 15 دينار وكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الثاني تبلغ 20

دينار، نسبة النجاح في تسويق النوع الأول تبلغ 95 % ونسبة النجاح في تسويق النوع الثاني تبلغ 98 %، الكلفة الناتجة من عدم النجاح في تسويق النوع الأول تبلغ 3 دينار والكلفة الناتجة من عدم النجاح في تسويق النوع الثاني تبلغ دينار واحد للوحدة الواحدة، الشركة ترغب في الحصول على خطة إنتاجية مثلى لنوعي القيمر لتقليل الكلفة إلى أقل ما يمكن.

**الحـــل:**

متغيرات القرار للمسألة هي كالآتي:

$\chi_1$: عدد الوحدات المتوقع إنتاجها يومياً من النوع الأول من القيمر.

$\chi_2$: عدد الوحدات المتوقع إنتاجها يومياً من النوع الثاني من القيمر.

قيود المسألة تكون بالصورة التالية:

$$\chi_1 + \chi_2 \geq 2000$$
$$\chi_1 \geq 500$$
$$\chi_2 \geq 1000$$

بعد إن تم تحديد متغيرات القرار والقيود للمسألة نقوم بتحديد دالة الهدف التي تمثل في هذه المسألة تقليل كلف الإنتاج والتي تكون على نوعين الأول يمثل كلف الإنتاج والثاني يمثل كلف عدم النجاح في التسويق لذلك فإن الكلفة الإجمالية للإنتاج تكون وفق المعادلة الآتية:

الكلفة الإجمالية = كلفة الإنتاج + (كلفة عدم النجاح في التسويق × احتمال الخطأ)

وعليه فإن كلف الإنتاج الإجمالية لنوعي القيمر هي:

$15 + 0.05\ (3) = 15.15$

$20 + 0.02\ (1) = 20.02$

أنموذج البرمجة الخطية(L.P.) للمسألة يكون بالصورة الآتية:

$$\text{Min} \quad Z = 15.15\,\chi_1 + 20.02\,\chi_2$$

S.T

$$\chi_1 + \chi_2 \geq 2000$$

$$\chi_1 \geq 50$$

$$\chi_2 \geq 1000$$