التحليل الحساس Sensitivity analysis

تكمن اهمية تحليل الحساسية في انه يعطي دراسة كاملة للتغيرات التي تطرأ على كل المتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي بحيث يبقى لنا اكبر عائد واقل كلفة وما هو مدى التغيرات في هذه المتغيرات فمثلاً اذا انتجنا نوع من السلع واردنا تسويق هذا المنتج فان هناك عدة ظروف تلعب دوراً في تحديد سعر هذه السلعة. فما هو اقل مدى واكبر مدى يمكن ان يأخذه سعر هذه السلعة بحيث يبقى الربح افضل ما يمكن، وسيتم توضيح الحل بالمثال التالي

مثال(1): جد التحليل الحساس للجملة اليمنى لبرنامج الانتاج الامثل لتحقيق اعلى ربح لنموذج البرمجة الخطية الآتي

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

s.t

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 80$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 70$$
$$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

زينة مصري

جدول الحل الامثل

Cj / Eq Bv.	3 X_1	4 X_2	1 X_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	bj
S_1	0	0	$8/21$	1	$9/21$	$-3/21$	$572/21$
X_2	0	1	$-1/21$	0	$5/21$	$-1/21$	$254/21$
X_1	1	0	$26/21$	0	$-4/21$	$5/21$	$200/21$
$C_j - Z_j$	0	0	$-53/21$	0	$-8/21$	$-11/21$	$1616/21$ Z

$X_1^* = \frac{200}{21}$

$X_2^* = \frac{254}{21}$

$X_3^* = 0$

$Z^* = \frac{1616}{21}$

ان المتغيرات S_1 ، S_2 ، S_3 هي المتغيرات المكملة (الوصية) التي اضيفت الى القيد الاول المتيسر بالمرحلة الاولى ، القيد الثاني المتيسر بالمرحلة الثانية ، اما S_3 هو المتغير المكمل الذي اضيف الى القيد الثالث في المرحلة الثالثة.

متغيرات S_2 و S_3 تؤثر على الحل بينما S_1 هو متغير زائد

- اذا لاحظنا جدول الحل الامثل فان الانتاج من X_3 هو صفر ($X_3 = 0$)

واذا امعنا النظر في الجدول نلاحظ ان لكل وحدة اضافية في المرحلة الثانية (مقابل S_2) لتزداد عدد الوحدات المنتجة من X_2 بمقدار $\frac{5}{21}$ وحدة (صف X_2 عمود S_2) وتقل عدد الوحدات المنتجة من X_1 بمقدار $(\frac{4}{21})$ ويزداد الربح بمقدار $(\frac{8}{21})$ (فلاحظها في صف $(C_j - Z_j)$ المقابل لعمود S_2)

- بملاحظة المرحلة الثالثة (عمود S_3) لزيادة وحدة واحدة من S_3 تزداد عدد الوحدات المنتجة من X_1 بمقدار $(\frac{5}{21})$ وتقل عدد الوحدات المنتجة من X_2 بمقدار $(\frac{1}{21})$ ويزداد الربح بمقدار $\frac{11}{21}$

- اما في المرحلة الاولى (S_1) فلا تأثير له على الانتاج لوجود فائض منه مقداره $(\frac{572}{21})$ حيث انه من ضمن المتغيرات الاساسية لجدول الحل الامثل

لهذا نقوم بإيجاد التقليل الخاص للعمودين S_4 و S_2 حيث انهم موارد نادرة

السؤال هنا ماهو المدى الذي تزداد او تقل به قيمة z_j والذي تبقى المتغيرات الاساسية موجبة، نبدأ بالقيمة (1)

$$\frac{572}{21} + (1) * \frac{2}{21} = \frac{574}{21} +$$

$$\frac{254}{21} + (1) * \frac{5}{21} = \frac{259}{21} +$$

$$\frac{200}{21} + (1)\left(\frac{-4}{21}\right) = \frac{196}{21} +$$

$$\frac{1616}{21} + (1)\left(\frac{-3}{21}\right) = +$$

لكن القيمة (2)

$$\frac{572}{21} + (2)\left(\frac{2}{21}\right) = +$$

$$\frac{254}{21} + (2) * \frac{5}{21} = +$$

$$\frac{200}{21} + 2\left(\frac{-4}{21}\right) = +$$

$$\frac{1616}{21} + 2\left(\frac{-3}{21}\right) = +$$

⋮

كذا القيمة (51)

$$572 + (51) * \left(\frac{2}{21}\right) = \frac{674}{21} +$$

$$\frac{254}{21} + (51) * \frac{5}{21} = +$$

$$\frac{200}{21} + 51\left(\frac{-4}{21}\right) = (-)$$

ظهرت قيمة سالبة

وهذا مناقض للشرط لابد ان تكون قيمة اي متغير اساسي سالبة

فاضية X_1 سالبة

نلاحظ انه بعد اضافة s_1 وحده تصبح قيمة x_1 سالبة

والمطلوب هنا ان نحدد عدد الوحدات التي نضيفها لكي يكون الحل ممكن لايجاد الصيغة الرياضية لتحديد الحد الاقل الذي تزداد به قيمة الجهة اليمنى ويبقى الحل ممكنا نتبع مايلي

1- نختار العمود الذي نرغب بايجاد التحليل الحساس له

2- نختار الرقم الاكثر سالبية في العمود الذي نرغب بايجاد التحليل الحساس له ويستثنى الارقام ما فوق $(z_j - c_j)$

3- نفرض ان مقدار التغير المجهول الثاني هو b_2 (لمثالنا الحالي)

4- تقوم بتشكيل المتباينات وكالآتي

ثابت المتغير الذي يقابل الرقم الاكثر سالبية في عمود s_2 + (b_2 * معامل s_2 في صف المتغير الذي يقابل الرقم الاكثر سالبية)

$$\frac{200}{21} + b_2\left(\frac{-4}{21}\right) \geq 0$$

لأنه المتغير الاساسي يجب ان يكون موجب

$b_2 \leq 50$ ← الحد الاعلى لـ b_2

ملاحظة :- الحد الاول من المتراجحة نختاره من العمود b_j للقيمة المقابلة للقيمة الاكثر سالبية في عمود s_2.

الحد الثاني b_2 هي القيمة التي نرغب بمعرفتها والقيمة الاخرى هي القيمة الاكثر سالبية بعمود s_2

ولتحديد الحد الادنى الذي تقل به الجبة اليمنى ويبقى الحل مقبولاً نتبع مايلي

1- نختار العمود الذي نرغب بايجاد التحليل الحساسي له

2- نختار الكمية موجبة لذلك العمود (نستثني صف $c_j - z_j$)

3- تطبيق المتراجحة

وبالرجوع الى الجدول الحل الامثل لمثالنا فان قيمة موجبة في عمود s_2 تقابل المتغير x_2 وتساوي $\frac{5}{21}$ وبتطبيق المتراجحة

$$\frac{254}{21} + b_2 \frac{5}{21} \geq 0$$

$$b_2 \geq -\frac{254}{21}$$

الحد الادنى لـ b_2

$$\therefore \quad -\frac{254}{21} \leq b_2 \leq 50$$

مما سبق تم تحديد اعلى قيمة لـ $b_2 = 50$ واقل قيمة $-\frac{254}{21}$ وبهذا فان قيمة الجانب الايسر للمجال الذي نتراوح بينه $(70 + 50)$ $(70 - \frac{254}{21})$

وبنفس الاسلوب السابق لايجاد b_2 من الممكن ايجاد b_3 حيث انها s_3 كمتغير نادر

$$\frac{-200}{5} \leq b_3 \leq \frac{572}{3}$$