نختار الصف الثالث للسهولة وذلك لاحتوائه على الصفر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بأخذ الصف الثالث

$$\det(A) = a_{31}(-1)^{3+1}|M_{31}| + a_{32}(-1)^{3+2}|M_{32}| + a_{33}(-1)^{3+3}|M_{33}|$$

$$= 0 + 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (-1)(2) + (+)(1)$$

$$= -2 + 1 = -1$$

اختار العمود الاول

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{21}(-1)^{2+1}|M_{21}| + a_{31}(-1)^{3+1}|M_{31}|$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 2(-1) - (-1) = -2 + 1 = -1$$

اختار الصف الثاني

$$\det(A) = a_{21}(-1)^{2+1}|M_{21}| + a_{22}(-1)^{2+2}|M_{22}| + a_{23}(-1)^{2+3}|M_{23}|$$

$$= 1(-)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(+)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3(-)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(3-4) + 2(2) - 3(2)$$

$$= +1 + 4 - 6 = \underline{-1}$$

أسئلة (واجب)

Find the determinant of the matrices :

Ex(1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ex(2) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

جد المحدد بالطريقتين

Ex(3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

جد المحدد باستخدام الطريقة الحديثة

Ex(4) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

جد المحدد باستخدام العامل المرافق

Inverse matrix معكوس المصفوفة

ويرمز له بالرمز (A^{-1}) ومن شروطه

١- ان تكون المصفوفة مربعة

٢- المحدد للمصفوفة A لا يساوي صفر $(|A| \neq$ صفر$)$

٣- ايجاد $adj(A)$ وهو مدور مصفوفة العوامل المرافقة

٤- تحقق القانون التالي:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{\text{مدور مصفوفة العوامل المرافقة}}{\text{المحدد للمصفوفة}}$$

Ex2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$|A| = 6 - 4 = 2 \neq$ صفر

نجد العوامل المرافقة

$\alpha_{11} = +3 \quad , \quad \alpha_{21} = -1$

$\alpha_{12} = -4 \qquad \alpha_{22} = +2$

مصفوفة العوامل المرافقة

$\therefore cof(A) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$adj(A) = (cof(A))^{T} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ملاحظة مهمة :- اذا كانت المصفوفة A ذات سعة (2×2) فحينئذ $adj(A)$ هو تبديل عناصر القطر الرئيسي وقلب اشارة عناصر القطر المعاكس.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow adj(B) = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Ex(2) Find the inverse matrix of A where $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = 10-12 = -2 \neq$ صفر

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ex(3): $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{matrix} = (-15+16+0)-(12+0+30)$$

$$= 1-(42) = -41 \neq 0$$

$$\alpha_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

$$\alpha_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(15-8) = -7$$

$$\alpha_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-12) = +12$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(10-0) = -10$$

$$\alpha_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (5+4) = 9$$

$$\alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0-8) = 8$$

$$\alpha_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = +(4-3) = +1$$

$$\alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2+3) = -5$$

$$\alpha_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-3-6) = -9$$

$$\therefore \operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} -15 & -7 & 12 \\ -10 & 9 & 8 \\ 1 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{cof}(A))^T = \begin{bmatrix} -15 & -10 & 1 \\ -7 & 9 & -5 \\ 12 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} = -\frac{1}{41}\begin{bmatrix} -15 & -10 & 1 \\ -7 & 9 & -5 \\ 12 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

خواص معكوس المصفوفة

Properties of matrix inverse

1- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Ex:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = -2-3 = -5 \neq 0$

$\therefore A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

الطرف الايسر

$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

الطرف الايمن

$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 2 \neq 0$, $adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$\therefore A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

اعتبرها مصفوفة جديدة ولتكن B ثم اجد لها المعكوس مرة ثانية