نتيجة : ان حدود الثقة للوسط الحسابي والمجموع الكلي للعينة الطبقية على التوالي هو :

$$\overset{U}{L} = \bar{y}_{st} \mp t_{\frac{\alpha}{2}} \; S_{(\bar{y}_{st})}$$

$$\overset{U}{L} = N\bar{y}_{st} \mp t_{\frac{\alpha}{2}} \; NS_{(\bar{y}_{st})}$$

حيث أن :

$$\therefore S^2[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h S_h^2}{N}$$

نظرية : في التوزيع المتساوي بما أن $\left(n_h = \frac{n}{L} \right)$ فان تباين متوسط العينة الطبقية يكون بالصيغة الاتية:

$$V[\bar{y}_{st}] = V[\bar{y}_{Eq.}] = \frac{L}{N^2} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2 \sigma_h^2}{n} - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2$$

Proof :

$$\because V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$\because n_h = \frac{n}{L}$$

$$\because V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2 \sigma_h^2}{N^2 \frac{n}{L}} - \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \sigma_h^2}{N^2}$$

$$\because V[\bar{y}_{Eq.}] = \frac{L}{N^2} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2 \sigma_h^2}{n} - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2$$

نظرية : في التوزيع المتناسب بما أن $\left(n_h = W_h \, n \right)$ فان تباين متوسط العينة الطبقية يكون بالصيغة الاتية:

$$V[\bar{y}_{st}] = V[\bar{y}_{Prop.}] = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \sigma_h^2}{n} - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2$$

Proof :

$$\because V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$\because n_h = W_h\, n$$

$$\because V[\bar{y}_{st}] = V[\bar{y}_{Prop.}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{W_h\, n} - \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \sigma_h^2}{N^2}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \sigma_h^2}{N n} - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2$$

$$\therefore V[\bar{y}_{Prop.}] = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \sigma_h^2}{n} - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2$$

نظرية : في التوزيع الأمثل بما أن $\left(n_h = \frac{W_h \sigma_h / \sqrt{C_h}}{\sum_{h=1}^{L} [W_h \sigma_h / \sqrt{C_h}]} n \right)$ فان تباين متوسط العينة الطبقية يكون بالصيغة الاتية:

$$V[\bar{y}_{st}] = V[\bar{y}_{Opt.}] = \frac{1}{N^2 n} [\sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h \sqrt{C_h}\ ][\sum_{h=1}^{L} (N_h \sigma_h / \sqrt{C_h}\ )]$$

$$- \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2$$

Proof :

$$\because V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$\because n_h = \frac{W_h \sigma_h / \sqrt{C_h}}{\sum_{h=1}^{L} [W_h \sigma_h / \sqrt{C_h}]} n$$

$$V[\bar{y}_{st}] = V[\bar{y}_{Opt.}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{\frac{W_h \sigma_h / \sqrt{C_h}}{\sum_{h=1}^{L} [W_h \sigma_h / \sqrt{C_h}]} n} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$= \left(\sum_{h=1}^{L} \frac{\frac{W_h \sigma_h}{n}}{\sqrt{C_h}}\right) \left[\sum_{h=1}^{L} (W_h \sigma_h / \sqrt{C_h})\right] - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$\therefore V[\bar{y}_{Opt.}] = \left(\sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h \sqrt{C_h}}{n}\right) \left[\sum_{h=1}^{L} (W_h \sigma_h / \sqrt{C_h})\right] - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2$$

or :

$$V[\bar{y}_{Opt.}] = \frac{1}{n N^2} \left(\sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h \sqrt{C_h}\right) \left(\sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h \Big/ \sqrt{C_h}\right) - \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2$$

نظرية : في التوزيع نيمان بما أن $\left(n_h = \frac{W_h \sigma_h}{\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h} n\right)$ فان تباين متوسط العينة الطبقية يكون بالصيغة الاتية:

$$V[\bar{y}_{st}] = V[\bar{y}_{Ney.}] = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h\right)^2}{n} - \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h^2$$

Proof :

$$\because V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$\because n_h = \frac{W_h \sigma_h}{\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h} n$$

$$\therefore V[\bar{y}_{st}] = V[\bar{y}_{Ney.}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{\frac{W_h \sigma_h}{\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h} n} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$= \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h\right)}{n} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$\therefore V[\bar{y}_{Ney.}] = \frac{(\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h)^2}{n} - \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h^2$$

نتيجة : في التوزيع المتناسب اذا كانت تباينات الطبقات متساوية اي أن :

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_L^2 = \sigma_{(y)}^2$$

اثبت أن :

$$\therefore V[\bar{y}_{Prop.}] = V[\bar{y}] = \frac{1-f}{n}\sigma_{(y)}^2$$

Proof :

$$\because V[\bar{y}_{Prop.}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{n} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$\because \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_L^2 = \sigma_{(y)}^2$$

$$\because \sum_{h=1}^{L} W_h = 1 \therefore V[\bar{y}_{Prop.}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_{(y)}^2}{n} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_{(y)}^2}{N}$$

$$= \frac{\sigma_{(y)}^2}{n} \sum_{h=1}^{L} W_h - \frac{\sigma_{(y)}^2}{N} \sum_{h=1}^{L} W_h$$

$$V[\bar{y}] = \frac{\sigma_{(y)}^2}{n} - \frac{\sigma_{(y)}^2}{N} = \sigma_{(y)}^2 [\frac{1}{n} - \frac{1}{N}] = \sigma_{(y)}^2 [\frac{N-n}{Nn}] = \frac{\sigma_{(y)}^2}{n}[1-f]$$

$$\therefore V[\bar{y}] = \frac{(1-f)}{n}\sigma_{(y)}^2$$

مثال: البيانات الاتية تمثل عينة مؤلفة من (16) مشروع من مشاريع الابنية مسحوبة من مجتمع حجمه (800) مشروع ، تتمثل القيم الموجودة في الجدول المصاريف السنوية (بملايين الدنانير) على كل مشروع ، بحيث تم تقسيم هذه المشاريع في المجتمع الى مشاريع كبيرة وعددها (500) مشروع ، ومشاريع صغيرة وعددها (300) مشروع . تم توزيع العينة اعلاه على الطبقتين باستخدام التوزيع المتناسب وكانت النتائج كلاتي :

Strata	المصاريف السنوية										
I	20	22	21	24	22	25	21	23	22	20	y_{1i}
II	16	17	15	18	16	17					y_{2i}

المطلوب :جد كلاً مما يلي :

1- متوسط العينة العشوائية البسيطة ؟

2- تباين العينة لمتوسط العينة العشوائية البسيطة ؟

3- متوسط العينة الطبقية ؟

4- تباين العينة لمتوسط العينة الطبقية ؟

5- المجموع الكلي التقديري للعينة الطبقية ؟

6- حدود الثقة لمتوسط المجتمع في المعاينة العشوائية الطبقية عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ ؟

الحل :

$$1- \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{16} y_i}{16} = 19.94$$

$$2- S^2[\bar{y}] = \frac{(1-f)}{n} S^2_{(y)} = \frac{(1-\frac{16}{800})}{16}(9.529) = 0.5837$$

$$3- \bar{y}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{N} = \frac{(500)(22)+(300)(16.5)}{800} = 19.94$$

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} y_{1i}}{n_1} = \frac{20+22+\ldots+20}{10} = 22$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} y_{2i}}{n_2} = \frac{16+17+\dots+17}{6} = 16.5$$

$$4 - S^2[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h S_h^2}{N}$$

$$\because W_h = \frac{N_h}{N}$$

$$\therefore W_1 = \frac{N_1}{N} = \frac{500}{800} = \frac{5}{8} \quad , W_2 = \frac{N_2}{N} = \frac{300}{800} = \frac{3}{8}$$

$$S^2_{(y_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} y_{1i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n_1} y_{1i})^2}{n_1}}{n_1 - 1} = \frac{4864 - \frac{(220)^2}{10}}{10-1} = 2.67$$

$$S^2_{(y_2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} y_{2i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n_2} y_{2i})^2}{n_1}}{n_2 - 1} = \frac{1639 - \frac{(99)^2}{6}}{6-1} = 1.1$$

$$S^2[\bar{y}_{st}] = [\frac{W_1^2 S^2_{(y_1)}}{n_1} + \frac{W_2^2 S^2_{(y_2)}}{n_2}] - \frac{1}{N}[W_1 S^2_{(y_1)} + W_2 S^2_{(y_2)}]$$

$$= [\frac{(\frac{5}{8})^2(2.67)}{10} + \frac{(\frac{3}{8})^2(1.1)}{6}] - \frac{1}{800}[(\frac{5}{8})(2.67) + (\frac{3}{8})(1.1)]$$

$$\therefore S^2[\bar{y}_{st}] = 0.1215 \quad , \quad \text{and} \quad S[\bar{y}_{st}] = \sqrt{0.1215} = 0.35$$

نلاحظ ان تباين متوسط المعاينة العشوائية الطبقية اقل من تباين متوسط المعاينة العشوائية البسيطة وهذا يدل على دقة الاسلوب الاول من المعاينة .

$$5 - \hat{Y}_{st} = N\,\bar{y}_{st} = (800)(19.94) = 15952$$

$$6 - \overset{U}{L} = \bar{y}_{st} \overset{-}{+} t_{\frac{\alpha}{2}}\, S_{(\bar{y}_{st})}$$

$$L = \bar{y}_{st} - t_{\frac{\alpha}{2}} S_{(\bar{y}_{st})} = 19.94 - (1.96)(0.35) = 19.189$$

$$U = \bar{y}_{st} + t_{\frac{\alpha}{2}} S_{(\bar{y}_{st})} = 19.94 + (1.96)(0.35) = 20$$