المحاضرة (١)

Mutivariate Analysis

تحليل متعدد المتغيرات :

المصادر :

① تحليل متعدد المتغيرات د. سلال حبيب البياتي

② Introduction to multivariate statistical analysis
T.W. Anderson

③ Multivatriate statistical methods
Donald F. Morrison

④ Methods of Multivariate Analysis
Alvin C. Rencher

Scanned with CamScanner

Chapter one: Basic Concepts

الفصل الاول: المفاهيم الاساسية

ملاحظة: رابعة موضوع غير المصفوفات، انواع المصفوفات، تساوي المصفوفات وعمليات عليها وخواصها - المحدد - المميزة

- Properties of Power of Matrices

1- $A \cdot A = A^2$

2- $A^r \cdot A^s = A^{r+s}$

3- $[A^r]^s = A^{rs}$ $\quad r, s \neq 0$

4 $A^0 = I$ مصفوفة وحدة

5- If $A^2 = A$ Then A is called idempotent matrix

(كما يزداد الاس فتنخفض النتيجة)

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

- Properties of trace :-

خواص اثر المصفوفة

If A and B b PxP matrices and k be scalar (عدد ثابت) then :

1- $tr(A \mp B) = tr(A) \mp tr(B)$

2- $tr(AB) = tr(BA)$

3- $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CBA)$

4- $tr(AA') = tr(A'A) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2$

5- $tr(I_p) = p$

6- $tr(\mathbf{0}) = 0$

7- $tr(A') = tr(A)$

8- $tr(kA) = k\, tr(A) \quad ; k \neq 0$

9- $tr(B^{-1}AB) = tr(\underbrace{B^{-1}B}_{I}A) = tr(A)$

10- $tr(kk') = tr(k'k) = k'k$

Not:- $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

هو مجموع عناصر قطر المصفوفة المربعة.

The trace, tr(A) of square matrix A is the sum of diagonal entries

Scanned with CamScanner

- Partitional matrices: تجزئة المصفوفات

Some times we Partition a matrix into sub matrix as a follows:-

Ex

$$A_{4\times5} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 5 & 3 & 2 & 9 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 7 \\ 9 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ \hdashline 4 & 3 & 8 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 7 \end{array}\right]$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

Scanned with CamScanner

محاضرة (٢)

The quadratic forms

الأشكال التربيعية

The function Q is called the quadratic forms for variates if :-

$$Q_A(\underline{X}) = \underline{X}' A \underline{X}$$

A is a square matrix of size (n×n) which called the matrix of the quadratic forms and $\underline{X}$ is random vector of size (n×1

A هي مصفوفة المربعات وهي مصفوفة ربيعية ذات حجم (n×n) والمتجه $\underline{X}$ هو متجه ذات حجم (n×1) جميع عناصره عبارة عن متغيرات عشوائية والمتجه العشوائي له والذي يكتب على الشكل التالي:

مثال:

على سبيل المثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$Q_A(\underline{X}) = \underline{X}' A X$$

$$= \underset{1\times 2}{(X_1 \; X_2)} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$= 2X_1^2 + 4X_2 + 5X_1X_2 + 5X_2X_1$$

In general :

Let $\underline{X}$ is a vector of size (2×1) and A is (2×2) then

$$Q_A(\underline{X}) = X'AX$$

Scanned with CamScanner

$$= (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \qquad a_{12}x_1 + a_{22}x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_2^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= \text{---} \quad (1)$$

ملاحظة: في المعادلة (1) نلاحظ أن الشكل الذي هو عبارة عن مضاعفة من الدرجة الثانية وقد أخذت عناصر المصفوفة A الشكل التربيعي ربعات المتغيرات بينما العناصر خارج القطر أخذت حاصل ضربات المتغيرات

إذا كانت المصفوفة A متماثلة فإن الشكل التربيعي الطرف يمين المعادلة (1) يصبح

If A is symmetric, then $Q_A(X)$ will be:-

$$Q_A(X) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

If A is (3×3) so that X is (3×1) then

$$Q_A(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 +$$

$$2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

Scanned with CamScanner

Classification of Symmetric of quadratic forms:

① Positie definte — الصيغ التربيعية

The matrix is called Positive define iff

$Q_A(x) > 0$ for $\underline{X} \neq 0$

مثال للمصفوفة A المقابلة الى الصيغة التربيعية اذا كانت الشكل التربيعي للمصفوفة اكبر من الصفر والمحددات غير صفرية

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$Q_A(x) = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2X_1^2 - 2X_1X_2 + 2X_2^2 - 2X_2X_3 + 2X_3^2 + 0X_1X_3$$

نفك المقدار وجعله مربع كامل كما يلي:

$$= X_1^2 + (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + X_3^2$$

$\therefore Q_A(x) > 0$ لان جميع الحدود موجبة

② Positive Semidefinite — شبه الصيغ التربيعية

The matrix A is called Positive semidefinite iff:

$Q_A(x) \geq 0$ for $\underline{X} \in R$

Scanned with CamScanner

③ Negative difinte : السالبة المحددة

The matrix A is called negative definte iff

$Q_A(x) < 0$ for $\underline{x} \neq 0$

Ex:-

if $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore Q_A(x) = \boxed{-2} < 0$

④ Negative Semidefinte شبه السالبة

$Q_A(\underline{x}) \leq 0$, $\underline{X} \in R$

⑤ Indefinte matrix غير محددة

A is indefinte iff $Q_A(\underline{x}) > 0$ for some $\underline{X} \neq 0$ and < 0 for some $\underline{X} \neq 0$.

Scanned with CamScanner