Lecture -1- ①

⊛ Conditional probability: الاحتمال الشرطي

If A and B are two events of sample space S, then the conditional probability of event A on the occurrence of event B denoted by (A|B) and then: اذا كانت A و B حادثتان في فضاء العينة S، يكون الاحتمال الشرطي لحدوث A مع العلم ان B قد حدثت (اي ان B حدثت اولاً وبعد ذلك حدثت A) يرمز لها بـ (A|B) وان له احتمال يحسب بالصيغة:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , P(B) > 0$$

This symbol may be read "probability of A given B" وهذا P(A|B) يقرأ "احتمال A معطاة B"

and وان احتمال حدوث B مع العلم ان A قد حدثت هو

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , P(A) > 0$$

Notes: ملاحظات

a) If A and B are dependent events, then اذا كانت A و B غير مستقلة فان:

① $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

② $P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B)$

⊛ ان احتمال $(A \cap B)$ هو نفسه احتمال $(B \cap A)$ ولكن عكس ما تبحث عنه الاحتمال الشرطي في ① و ② اعلاه.

b) If A and B are independent events, then اذا كانت A و B حادثتان مستقلتان فان

① $P(A|B) = P(A)$

② $P(B|A) = P(B)$

⊛ وذلك لأن $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B)$

توضيح: اذا كانت A و B مستقلتان فان

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

EX:(1) مثال توضيحي

Let a pair (زوج) of fair dice be tossed. If the sum is 6, find the prob. that at least one of the dice is a 2. in other words, If

$E = \{\text{sum is } 6\} = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$

and $A = \{\text{a 2 appears on at least one die}\}$

$= \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$

$n(S) = 36$ لنفرض ان زوج (اثنين) من زهر النرد المتزن

$\therefore P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$ (الاعتيادي) وهما سوية، اذا كانت النتيجة

$(A \cap E) = \{(2,4), (4,2)\}$ مجموع الرقمين (الزارين) هو 6 (اي ان حادثة

$P(A \cap E) = \frac{2}{36}$ مجموع الرقمين يساوي 6 من الحادثة الثانية (التي حدثت اولا

اي المعطاة)) 6 اوجد احتمال ان على الاقل احد

$P(E) = \frac{5}{36}$ الزارين يظهر الرقم (2).

$\Rightarrow P(A|E) = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$

EX:(2)

A fair coin is tossed three times. Find the probability of getting 2 heads given that the first toss shows a head?

$n(S) = w^n = 2^3 = 8$

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$A = \{$The event of getting 2 head$\}$

$B = \{$The event of getting head in the first toss$\}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$A = \{HHT, HTH, THH\}$

$B = \{HTT, HHH, HTH, HHT\}$

$A \cap B = \{HHT, HTH\}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{8}$, $P(B) = \frac{4}{8}$

$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{8} / \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

EX:(3)

Suppose a firm has 150 applicants for 30 job openings. Some of the applicants are over 45 years of age. the table below shows the breakdown by age of who was hired, suppose one person is selected at random from these 150 applicants

شركة لديها 30 فرصة عمل وعدد المتقدمين هو 150 شخصاً، بعضهم كانت اعمارهم فوق 45 سنة. الجدول ادناه يوضح الاشخاص المقبولين حسب الاعمار. وعلى فرض انه اختير شخص واحد عشوائياً من الـ 150 المتقدمين.

قرار التوظيف Employment decision	A اقل من under 45	B 45 or older	Total
not hired (NH) غير مستأجر	80	40	120
hired (H) مستأجر	20	10	30
Total	100	50	150

① what is the probability that the person selected was hire knowing that he or she is 45 or over? ما هو احتمال ان يكون الشخص المختار من المقبولين علماً ان عمره فوق 45

② what is the prob. that the person selected was hired knowing that he or she is under 45? ما هو احتمال ان يكون الشخص المختار من المقبولين وعمره تحت 45 سنة

③ what is the prob. that the person selected was hired?

④ ما هو احتمال ان يكون الشخص المختار من المقبولين بالوظيفة.

Sol.

H: مقبول بالوظيفة (مستأجر)

NH: غير مقبول بالوظيفة (غير مستأجر).

① $P(H|B) = ?$

$$P(H|B) = \frac{P(H \cap B)}{P(B)}$$

الاحتمال يكون للمقبولين مع العلم انهم من الاعمار الفوق 45.

$$P(H \cap B) = \frac{10}{150} \quad , \quad P(B) = \frac{50}{150}$$

$$\therefore P(H|B) = \frac{10/150}{50/150} = \frac{1}{5}$$

② $$P(H|A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{20/150}{100/150} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

③ $$P(H) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$$

EX:(1) امثلة عن الاحتمال الشرطي (Conditional Prob.)

Let a pair of fair dice be tossed. If the sum is 6. Find the prob. that at least one of the dice is a 2.

على فرض ان زهري نرد اعتياديين رميا، واذا كان المجموع لوجهي هذين الزارين (الوجهين الذين ظهرا) هو (6)، اوجد احتمال انه على الاقل احد الزارين ظهر عليه الوجه 2.

Sol.: $n(S) = 36$

$E = \{$ sum is 6 $\}$ لنفرض ان الحادثة E تمثل ان مجموع وجهي الزارين هو 6.

$\therefore E = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$

وان الحادثة A تمثل ظهور الرقم 2 على الاقل على احد الزارين

$\therefore A = \{$ a 2 appear on at least one dice $\}$

$\therefore A = \{(2,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (2,6), (6,2)\}$

من منطوق المثال نلاحظ ان الحادثة E قد وقعت أولاً اي ان مجموع وجهي الزارين كان (6) والمطلوب هو ايجاد احتمال انه على الاقل احد الزارين اظهر الرقم 2 (مع العلم ان المجموع 6) وعليه يكون الاحتمال المطلوب هو احتمال شرطي اي ان

$$\therefore P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

$$(A \cap E) = \{(2,4), (4,2)\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$\therefore P(A|E) = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

EX: (2)

A fair coin is tossed three times. Find the Prob. of getting 2 heads given that the first toss shows a head.

قطعة نقود اعتيادية رميت ثلاث مرات، اوجد احتمال الحصول على رميتين صورة مع العلم ان الرمية الاولى كانت صورة. اي ان الشرط المعلوم (المعطى Given) ان الرمية الاولى هي صورة (H).

Sol.:

$$n(S') = r^n = 2^3 = 8$$

$$S' = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$A = \{$ event of getting 2 heads $\}$ حادثة الحصول على (2) صورة

$$\therefore A = \{HHT, HTH, THH\}$$

$B = \{$ event of getting head in the first toss $\}$

B: حادثة الحصول على صورة في الرمية الاولى

$$\therefore B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$$

والاحتمال المطلوب هو الحصول على صورتين مع العلم ان الرمية الاولى كانت صورة اي هو

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$A \cap B = \{HHT, HTH\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{8}$$

$$P(B) = \frac{4}{8}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{2/8}{4/8} = \frac{2}{4}$$

EX: (3)

Two 4's and two 7's are arranged at random to form 4-digits number ~~we assume~~, ~~that all numbers~~ if that 4-digits number is odd, what is the prob. that the two 4's are together.

لدينا اربعتين (4,4) و بعتين (7,7) رتبوا عشوائيا بحيث يكونوا رقم مد (4) مراتب. اذا كان الرقم الذي سوف يتكون مفردي. ما هو احتمال ان تكون الاربعتين في هذا الرقم الثنتين سوياً (اي الواحدة بعد الاخرى).

مد مفعول السؤال نلاحظ ان هناك حادثتين وان احداهما قد وقعت ~~وكذلك والمطلوب~~: أولاً (وهي حادثة ان الرقم هو مفردي) والمطلوب إيجاد احتمال الحادثة الثانية (اي بعد وقوع الحادثة الاولى)

Sol.:

$$n(S) = P^4_{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4.3.2.1}{2 \times 2} = 6$$

$S = \{7744, 7447, 4477, 4774, 4747, 4774\}$

$A = \{\text{Two } 4\text{'s together}\}$

$\therefore A = \{7744, 7447, 4477\}$

$B = \{\text{The number is odd}\} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{6}$

$\therefore B = \{4477, 4747, 7447\}$

الاحتمال المطلوب هو ان تكون الاربعتين سوياً مع العلم ان الرقم مفردي

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A \cap B = \{4477, 7447\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6}$

$$P(A|B) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$