Lecture-10-

EX:(1)

Let

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12x - 6x^2}{8} & , 0 < x < 2 \\ 0 & , \text{O.W.} \end{cases}$$

① Is $f(x)$ is P.d.f. ?

② Find $P(X>1)$, $P(X>0)$, $P(X=1)$, $P(-1<X\leq 1)$, $F(X)$

Sol.:

نبسط الدالة $f(x)$ وذلك بسبب العدد (2) عند البسط و احتمالا و هو طلقا ينتج

$$f(x) = \frac{1}{8_4}[6x - 3x^2]$$

$$\therefore f(x) = \frac{6x - 3x^2}{4}$$ تصبح هذه العلاقة فقط للتبسيط و يمكن ايجادها كما هي بدون تبسيط .

① لمعرفة هل ان $f(x)$ هي P.d.f ام لا يجب ان تحقق الشرط الآتي

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

نعوض تكامل الدالة $f(x)$ وفترة التكامل هي فترة X الاصلية

فاذا كانت نتيجة التكامل تساوي (1) فالدالة هي P.d.f بالاضافة الى ان $f(x) \geq 0$ لجميع قيم x .

$$\int_0^2 \frac{6x - 3x^2}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\int_0^2 6x\,dx - \int_0^2 3x^2\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\cancel{6}^{3}x^2}{\cancel{2}_{1}}\Big]_0^2 - \frac{3x^3}{3}\Big]_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(3*2^2 - 3*0) - (2^3 - 0^3)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[12 - 8] = \frac{1}{4}[4] = 1$$

∴ نتيجة التكامل كانت (1)

∴ $f(x)$ هي P.d.f .

② ⊛ $P(X>1) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{6X-3x^2}{4}\,dx$ احتمال ان X اكبر من (1) يعبر عنها بتكامل $f(x)$ وحدود التكامل من (1) الى اكبر قيمة لـ X الاصلية وهي (2).

$= \frac{1}{4}\left[\left[\frac{6x^2}{2}\right]_1^2 - \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left[3(2^2-1^2) - (2^3-1^3)\right]$

$= \frac{1}{4}[12-3-8+1] = \frac{1}{4}[2] = \frac{1}{2}$

⊛ $P(X>0) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{6X-3x^2}{4}\,dx$

∴ الاحتمال المطلوب هو لـ X اكبر من (0) يعني سوف نوجد هذا الاحتمال بتكامل $f(X)$ وحدود التكامل تكون من (0) الى اكبر قيمة لـ X الاصلية وبهذا سوف يكون لدينا التكامل لكل فترة X الاصلية وعليه تكون نتيجة التكامل = 1 لان $f(x)$ هي p.d.f كما اثبتناها في ①.

$\int_0^2 \frac{6X-3x^2}{4}\,dx = 1$ لان $f(x)$ هي p.d.f وان فترة X الاصلية هي $0 < X < 2$

⊛ $P(X=1) = 0$ لان X متغير مستمر وان احتمال ان X تاخذ قيمة معينة غير محكمة وبالتالي الاحتمال = صفر

⊛ $P(-1<X\leq 1) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} \frac{6X-3x^2}{4}\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{6X-3x^2}{4}\,dx}_{=0} + \int_0^1 \frac{6X-3x^2}{4}\,dx$

بجراء حدود التكامل اكمل جزئين لان (-1) ليس من ضمن فترة X الاصلية فلهذا ناخذ التكامل الاول من (-1) الى اكبر قيمة لـ X وهي (0) والتكامل الثاني من (0) الى اكبر الاعلى لفترة الاحتمال المطلوب وهو (1)

$\therefore P(-1<X\leq 1) = \int_0^1 \frac{6X-3x^2}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[3x^2 - x^3\right]_0^1$

$$P(-1<X\leq 1)=\frac{1}{4}\left[3[(1^2)-0^2]-[1^3-0^3]\right]$$

$$=\frac{1}{4}[3-1]=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

⊗ $F(X)=P(X\leq x)$

$$=\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{4}\int_0^x(6t-3t^2)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{6t^2}{2}-\frac{3t^3}{3}\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{4}[3x^2-x^3]$$

$$F(x)=\frac{3x^2-x^3}{4}\quad ,\quad 0<x<2$$

EX: (2)

Let the r.v. x has the P.d.f.

$$f(x)=\begin{cases}cx^2 & -1<x<1\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

① Find the value of the constant c.

② Find $P(0<x<1)$, $P(0<X\leq 3)$, $P(X=\frac{1}{2})$, $P(X<-1)$, $F(x)$.

Sol.

① لإيجاد قيمة (c) نتأكد من ان $f(x)$ هي P.d.f. وعليه فهي تحقق الشرط بأن التكامل للدالة $f(x)$ لكل قيم (x) الاصلية $=1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1$$

$$\int_{-1}^{1} cx^2\,dx = 1$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{3}\left(1^3-(-1)^3\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{3}(1+1) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}c = 1$$

$$\therefore c = \frac{3}{2}$$

بعد إيجاد قيمة الثابت (c) نعوض عنها في الدالة $f(x)$ ونستخدم هذه الدالة بعد التعويض في إيجاد جميع المطالب الأخرى.

$$\therefore f(x) = \frac{3x^2}{2}$$

(2) ⊛ $P(0<x<1) = \int_0^1 \frac{3x^2}{2}\,dx$

$$= \frac{3x^3}{2\times 3}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left[1^3-0^3\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

⊛ $P(0<x\leq 3) = \int_0^3 \frac{3x^2}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{3x^2}{2}\,dx + \int_1^3 \frac{3x^2}{2}\,dx$

$\int_0^1$ ⟸ هو جزء التكامل الذي يحتوي على الحد الأعلى للاحتمال المطلوب خارج الفترة الأصلية لـ x وعليه يكون التكامل الثاني $\int_1^3$ يساوي الصفر لأنه خارج الفترة الأصلية لـ x أي أن

$$P(0<x\leq 3) = \int_0^1 \frac{3x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}$$

هو النتيجة المطلوب الذي قبله.

⊛ $P(X=\frac{1}{2}) = 0$ لأن X متغير أكيد مستمر والاحتمال عند نقطة يساوي صفر

بما أن X تأخذ قيم محصورة بين -1 و 1 (بالقطع)

⊛ $P(X<-1) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{3x^2}{2}\,dx = 0$

لأن $(-\infty)$ هي خارج حدود X والاحتمال عند X خارج الحدود يساوي صفر

أي أن (-1) هو أكبر قيمة ممكنة لـ X

⊛ $F(x) = P(X \le x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{3t^2}{2}\,dt$$

$$= \frac{t^3}{2}\Big]_{-1}^{x} = \frac{x^3}{2} - \frac{(-1)^3}{2} = \frac{x^3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$F(x) = \frac{x^3+1}{2}$$