Lecture -11-

EX:(5)

Suppose the continuous cumulative distribution function (c.d.f.) is:

لنفرض ان لدينا دالة التوزيع التراكمية الآتية

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

Find: $P(1<x<3)$ ، $P(x>4)$ ، $P(x<8)$

Sol:

بما ان الدالة اعلاه هي c.d.f. فيجب ايجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير X وهي $f(x)$ (p.d.f.) حتى نتمكن من ايجاد الاحتمالات المطلوبة.

$$\therefore f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$= \frac{d(1-e^{-x})}{dx}$$

$$= 0 - (-1)e^{-x}$$

مشتقة الثابت = صفر

مشتقة الدالة الاسية = الدالة الاسية مضروبة في مشتقة الأس

$$\therefore f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\therefore P(1<x<3) = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 e^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-x}\Big]_1^3 = -\left[e^{-3} - e^{-1}\right] = e^{-1} - e^{-3}$$

$$= 0.368 - 0.05 = 0.318$$

$$\therefore P(1<x<3) = 0.318$$

$$P(X>4) = \int_4^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_4^\infty = -[e^{-\infty} - e^{-4}]$$

$$= e^{-4} - \quad = e^{-4} - 0 \quad \rightarrow \quad e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\therefore P(X>4) = 0.018$$

$$P(X<2) = \int_0^2 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_0^2 = -[e^{-2} - e^{0}]$$

$$e^0 = 1$$

$$= 1 - e^{-2} = 1 - 0.018 = 0.982$$

$$\therefore P(X<2) = 0.982$$

4.14. The expectation of continuous r.v. X :

The expectation of r.v. X is denoted by $E(X)$ and defined by :

$$E(X) = \int_{R} x f(x)\,dx$$

R لكل مدى x

EX: (6)

If X is a r.v. has p.d.f.

اذا كان X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمال

$$f(x) = \begin{cases} K & 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{O.W.} \end{cases}$$

Find K and $P(1 \le X \le 2)$ و $E(X)$ و $E(X^2)$ و $F(x)$

Sol.: بما ان X متغير عشوائي به الة كثافة احتمال p.d.f. (اي ذكر في المعلوق ان $f(x)$ هي p.d.f. اذن تحقق شروط p.d.f. وهيا

$$\int_R f(x)\,dx = 1$$

$$\therefore \int_0^3 K\,dx = 1$$

$$\int_0^3 k\,dx = 1$$

$$\Rightarrow kx\Big]_0^3 = 1$$

$$k[3-0] = 1$$

$$3k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$* P(1 \le x \le 2) = \int_1^2 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}x\Big]_1^2 = \frac{1}{3}(2) - \frac{1}{3}(1)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$* E(X) = \int_0^3 x f(x)\,dx = \int_0^3 x \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_0^3$$

$$= \frac{3^2}{6} - 0 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$* E(X^2) = \int_0^3 x^2 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big]_0^3$$

$$= \frac{1}{9}[3^3 - 0] = \frac{27}{9} = 3$$

$$* F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{3}\,dt = \frac{t}{3}\Big]_0^x = \frac{x}{3}$$

(*) Variance and standard deviation of continuous r.v.

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

وان خصائص التباين هي نفس الخصائص المذكورة في حالة المتغير العشوائي المتقطع.

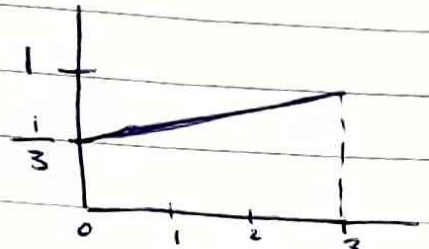
ولايجاد لتباين للمثال (6) فان

$$V(X) = \int_0^? (X-\mu)^2 f(x)\,dx = EX^2 - (EX)^2$$

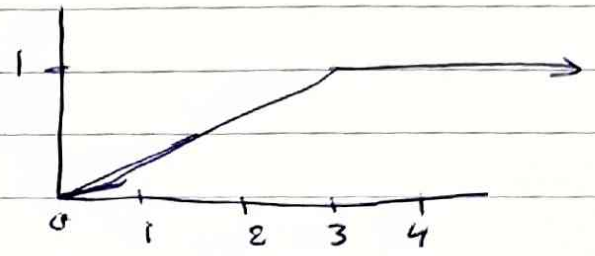
وبما ان EX^2 ، EX تم ايجادهم في مطلوب سابقه فان

$$\therefore V(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{12-9}{4} = \frac{3}{4}$$

يمكن رسم دالة كثافة احتمال نفس المثال P.d.f. وكذلك C.d.F. كالاتي



P.d.f.



C.d.F.

يبدأ هذه او فترة يتم X من 0 الى (3) وبما ان الدالة = $\frac{1}{3}$ ∴ سوف تكون بداية المنحنى عند $\frac{1}{3}$ بالنسبة الى المحور العمودي والتي تقابل (0) في المحور الافقي وتصعد الى (1) في المحور العمودي لانهاية P.d.f. حيث تصل الى (1) عندما X تاخذ اعلى قيمة في الفترة اي الى الاعلى

في رسم F(x) مقدار بالاصل عندما الاول لـ X وعندما الاعلى لـ X تاخذ (1) ويستمر الخط بصورها موازي للمحور الافقي عند الواحد

EX: (7)

If X is a r.v. has the P.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x} & 0 < x \\ 0 & o.w \end{cases}$$

Find ① The constant c ② F(x) ③ $P(0<X\leq 3)$
④ $P(X<5)$ ⑤ $P(X>3)$ ⑥ E(X)

①

ب: ذكر في السؤال ان X يمتلك دالة كثافة احتمال اي ان f(x) هو p.d.f

$$\therefore \int_0^\infty f(x)\,dx = 1$$

⊛ ان الفترة لـ X هي $X > 0$ اي ان X اكبر من (0) اي ان اقل قيمة لـ X (كما بالدرس هو 0) وكما بالاعلى غير محدد اذن يأخذ ∞

$$\Rightarrow \int_0^\infty c e^{-x}\,dx = 1$$

$$c\left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

* تكامل الدالة الاسية = الدالة الاسية نفسها اذا كانت مشتقة الأس موجودة،

وهنا لدينا مشتقة الأس هي (-1) وغير موجودة، فاذن سوف نضرب ونقسم على $\left(\frac{-1}{-1}\right)$ وان (-1) التي في البسط سوف تذهب مع التكامل ويبقى الاشارة السالبة في المقام تضرب في ناتج التكامل ولهذا اصبح ناتج التكامل هو $(-e^{-x})$.

$$\therefore c\left[-\left(e^{-\infty} - e^{0}\right)\right] = 1$$

$$\Rightarrow c\left[-(0-1)\right] = 1$$

$$\Rightarrow c(1) = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 < x \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

② $$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= -e^{-t}\Big]_0^x = -\left[e^{-x} - e^{0}\right] = -\left[e^{-x} - 1\right]$$

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

(3) $P(0<X\leq 3) = \int_0^3 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_0^3 = -[e^{-3} - e^{0}]$

$= -[e^{-3} - 1] = 1 - e^{-3}$

(4) $P(X<5) = \int_0^5 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^5 = -[e^{-5} - 1] = 1 - e^{-5}$

(5) $P(X>3) = \int_3^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_3^\infty = -[e^{-\infty} - e^{-3}] = e^{-3}$

(6) $E(X) = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx$ ...(1)

وهذه الدالة اي التكامل يحل بطريقة u و dv وكالآتي

Let $u = x \Rightarrow du = dx$

Let $dv = e^{-x}\,dx$

ناخذ التكامل لـ dv يطلع

$\int dv = \int e^{-x}\,dx$

$v = -e^{-x}$

وبالتالي قانون التكامل في المعادلة (1) يصبح

$\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = [uv - \int v\,du]_0^\infty$

$= x(-e^{-x})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{(-e^{-x})}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}$

$= -[\underbrace{\infty e^{-\infty}}_{=0} - 0(\underbrace{e^{0}}_{=1})] - [\underbrace{e^{-\infty}}_{=0} - e^{0}]$

$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\therefore \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1$

$\therefore E(X) = 1$

EX: (1)

واجب

Suppose the continuous cumulative distribution function is:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

Find $P(1 < x < 3)$, $P(x > 4)$, $P(x < 2)$

EX: (2)

If the r.v. X has the p.d.f. is:

$$f(x) = \begin{cases} k(x+1) & -1 < x < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

Find: k , $F(x)$, $E(x)$, $V(x)$, $P(x > 0)$, $P(x \leq -1)$

$P(x = 0)$