احصاء حيوي

الكورس الاول

(موضوع المحاضرة)

اختبارات تتعلق بالمتوسطات تحليل التباين بمعيار واحد (تقدير معلمات النموذج)

Dr.Safwan Nathem Rashed

- **تقدير معلمات النموذج تحليل التباين (اتجاه واحد)**

يمكن تقدير معلمات النموذج الرياضي للتحليل:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i=1,2,...,k \quad ; \quad j=1,2,...,n$$

حيث ($\mu, \tau_i, \varepsilon_{ij}$) يمثلون معلمات النموذج وباستخدام البيانات المأخوذة من المجتمع قيد الدراسة وكالاتي:

$$\hat{\mu} = \bar{Y}.. \quad ; \quad \hat{\tau}_i = \bar{Y}_i. - \bar{Y}.. \quad ; \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i.$$

وبجمع هذه المقدرات الثلاثة نحصل على:

$$\hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\varepsilon}_{ij} = \bar{Y}.. + \bar{Y}_i. - \bar{Y}.. + Y_{ij} - \bar{Y}_i. = Y_{ij}$$

$$\therefore Y_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\varepsilon}_{ij}$$

- **كيف تجزئة مجموع مربعات الانحرافات الكلية.**

يمكن تجزئة مجموعة الانحرافات الكلية الى مكوناتها وهي

اساس تحليل التباين للنموذج العام وعلى النحو الاتي:

$$\therefore Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

وبالتعويض عن معلمات النموذج بقيمها التقديرية:

$$Y_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\varepsilon}_{ij}$$

$$Y_{ij} = \bar{Y}.. + \left(\bar{Y}_i. - \bar{Y}..\right) + \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i.\right)$$

$$\left(Y_{ij} - \bar{Y}..\right) = \left(\bar{Y}_i. - \bar{Y}..\right) + \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i.\right)$$

وبتربيع طرفي المعادلة وتبسيطها نحصل على:

$$\left(Y_{ij}-\bar{Y}..\right)^2=\left[\left(\bar{Y}_i.-\bar{Y}..\right)+\left(Y_{ij}-\bar{Y}_i.\right)\right]^2$$

$$\left(Y_{ij}-\bar{Y}..\right)^2=\left(\bar{Y}_i.-\bar{Y}..\right)^2+2\left(Y_{ij}-\bar{Y}_i.\right)\left(\bar{Y}_i.-\bar{Y}..\right)+\left(Y_{ij}-\bar{Y}_i.\right)^2$$

وبأخذ المجموع لكل قيمة من (i , j) نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}..\right)^2=n\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{Y}_i.-\bar{Y}..\right)^2+2\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_i.\right)\left(\bar{Y}_i.-\bar{Y}..\right)}_{\text{Zero}}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_i.\right)^2$$

$$\therefore SST=SS_B+SSe$$

حيث ان:

SST : مجموع مربعات انحرافات الكلية

Total sum of Squares

SS_B : مجموع مربعات انحرافات بين المعاملات

Sum of Squares between treatment

SSe : مجموع مربعات الخطأ

Sum of Squares of error

حيث ان:

عدد المعادلات $i=1,2,3,\ldots,k$ عدد المشاهدات $j=1,2,3,\ldots n$

Treatment	Yij Observation				مجاميع المعادلات $Y_{i.}$	متوسط المعادلات $\bar{Y}_{i.}$
1	Y11	Y12	…..	Y1n	Y1.	$\bar{Y}_{1.}$
2	Y21	Y22	…..	Y2n	Y2.	$\bar{Y}_{2.}$
3	Y31	Y32	…..	Y3n	Y3.	$\bar{Y}_{3.}$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
k	Yk1	Yk2	…..	Ykn	Yk.	$\bar{Y}_{k.}$
					Y..	$\bar{Y}_{..}$

ملاحظة: وقد تكون (n_i) لكل معاملة غير متساوي اي مختلف، سيتم دراسة هذا الموضوع في المرحلة الرابعة بشكل اكثر وضوحاً.

• جدول تحليل التباين(Analysis of Variance Table)

يمكن توضيح نتائج ومعادلات الخاصة بجدول تحليل التباين والمكونات التابعة له (اي الهيكلية العامة له) على النحو الاتي:

- درجات الحرية (Digress of freedom)

١. درجة حرية بين المعاملات (between treatments)

$$d.f_B = k - 1$$

٢. درجة حرية الاخطاء داخل المعاملات (within treatment of error)

$$d.f_e = k \times (n - 1)$$

٣. درجة حرية الكلية للمعاملات (total freedom of treatment)

$$d.f_T = k \times n - 1$$

• مجموع مربعات الانحرافات (Sum of Squares (S.S))

١. مجموع مربعات الانحرافات الكلية (sum of square of Total)

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}..\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{(Y..)^2}{k\,n}$$

$$\therefore SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - C \quad ; \quad C = \frac{(Y..)^2}{k\,n}$$

C: معامل التصحيح

٢. مجموع مربعات الانحرافات للمعاملات (sum of square of treatment)

$$SS_B = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\bar{Y}_i. - \bar{Y}..\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i^2.}{n} - \frac{(Y..)^2}{k\,n}; \quad \therefore SS_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i^2.}{n} - C$$

$$\therefore C = \frac{(Y..)^2}{k\,n}$$ معامل التصحيح

٣. مجموع مربعات الانحرافات للأخطاء (sum of square of error)

$$\therefore SSe = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i}.\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{i}^2.}{n}$$

Or

$$\therefore SSe = SST - SS_B = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - C - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{i}^2.}{n} - C \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{i}^2.}{n}$$

- **متوسط مربعات انحرافات**

(Mean Squares of Deviations)

يتم الحصول على متوسط مربعات الانحرافات لكل من المعاملات والخطأ من خلال قسمة مجموع مربعات الانحرافات لكل منهما على درجة الحرية الخاصة به لنحصل على:

$$\therefore MS_B = \frac{SS_B}{k-1}$$

$$\therefore MSe = \frac{SSe}{k \times (n-1)}$$

- **المختبر الاحصائي F**

وبعدما تم الحصول على التباينات المتمثلة بتباين بين المعاملات فضلاً عن تباين الاخطاء، سوف نحصل على القيمة المختبرية المحسوبة من خلال المختبر (F) بقسمة التباينات وفق الصيغة الرياضية الاتية:

$$\therefore F_{cal} = \frac{MS_B}{MSe} \sim F_{(\alpha, v_1, v_2)} = F_{(\alpha,(k-1),k(n-1))}$$

ونقارن القيمة المحسوبة (Fcal) مع القيمة الجدولية لـ (Ftable) المناظرة لها فاذا كانت (Ftable < Fcal) سوف نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل بالفرضية البديلة (H_1) وبذلك هناك فروق معنوية بين المعاملات اي على الاقل وجود متوسطين حسابيين من المعاملات غير متساوٍ والعكس صحيح.

يمكن تلخيص تحليل التباين بمعيار واحد او اتجاه واحد بجدول التحليل الموضح ادناه:

ANOVA مصادر التباين	Digress of Freedom درجة الحرية (d.f)	Sum of Squares مجموع مربعات الانحرافات (S.S)	Mean of deviation متوسط انحرافات (M.S)	Test of Stat. المختبر الاحصائي (F)	Table of F
Between of Treatments بين المعاملات	$k-1$	$SS_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i^2.}{n} - C$	$MS_B = \frac{SS_B}{k-1}$	$F_{cal} = \frac{MS_B}{MSe}$	$F_{(\alpha,(k-1),k(n-1))}$
Within of error داخل الاخطاء	$k\times(n-1)$	$SSe = SST - SS_B = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i^2.}{n}$	$MSe = \frac{SSe}{k\times(n-1)}$		
Total	$k\times n-1$	$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - C$			$\therefore\ C = \frac{(Y..)^2}{kn}$

• ايجاد القيمة الجدولية لـ F

PERCENTAGE POINTS OF THE F DISTRIBUTION

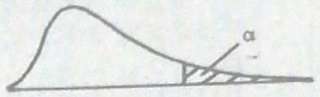
The table gives the values of $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ the 100α percentage point of the F distribution having ν_1 degrees of freedom in the numerator and ν_2 degrees of freedom in the denominator.

For each pair of values of ν_1 and ν_2, $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$ is tabulated for $\alpha = 0.05, 0.025, 0.01, 0.001$, the 0.025 values being bracketed.

The lower percentage points of the distribution may be obtained from the relation:-

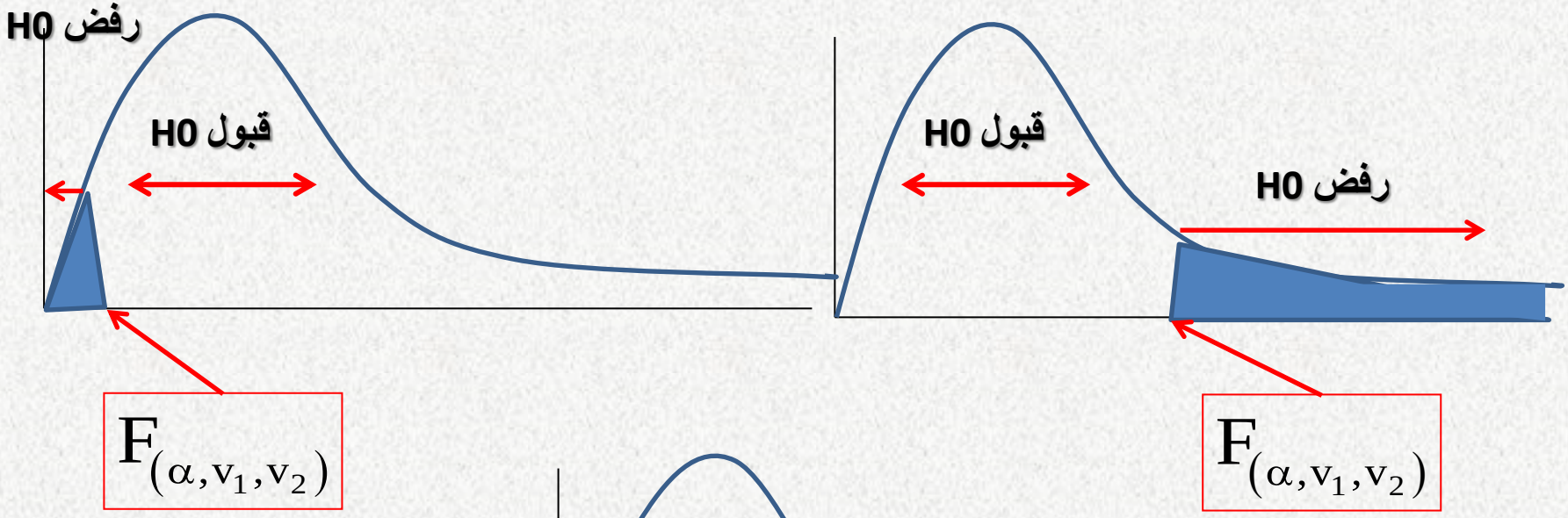
$$F_{1-\alpha;\nu_1,\nu_2} = 1/F_{\alpha;\nu_2,\nu_1}$$

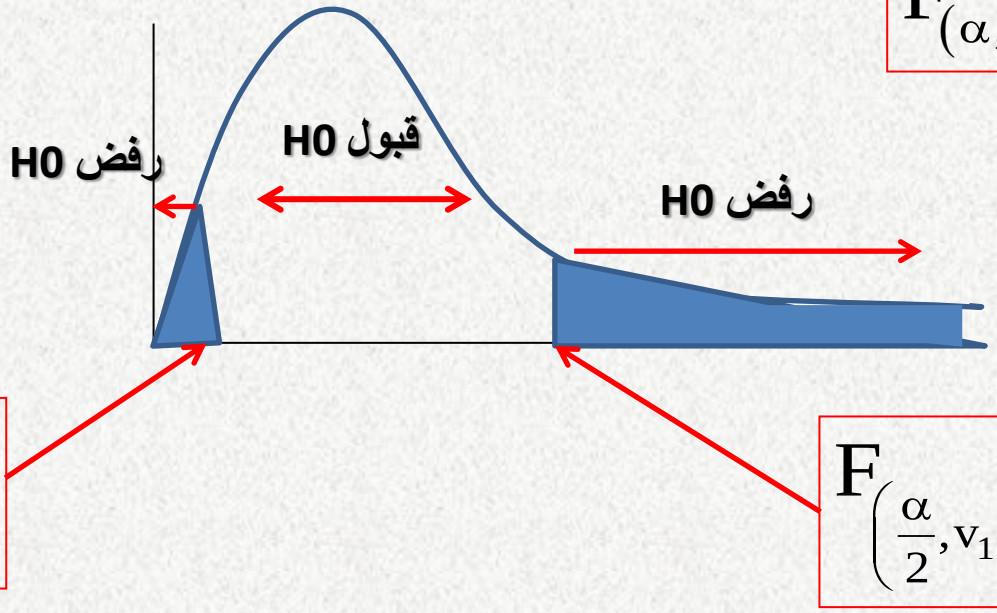
e.g. $F_{.95;12,8} = 1/F_{.05;8,12} = 1/2.85 = 0.351$



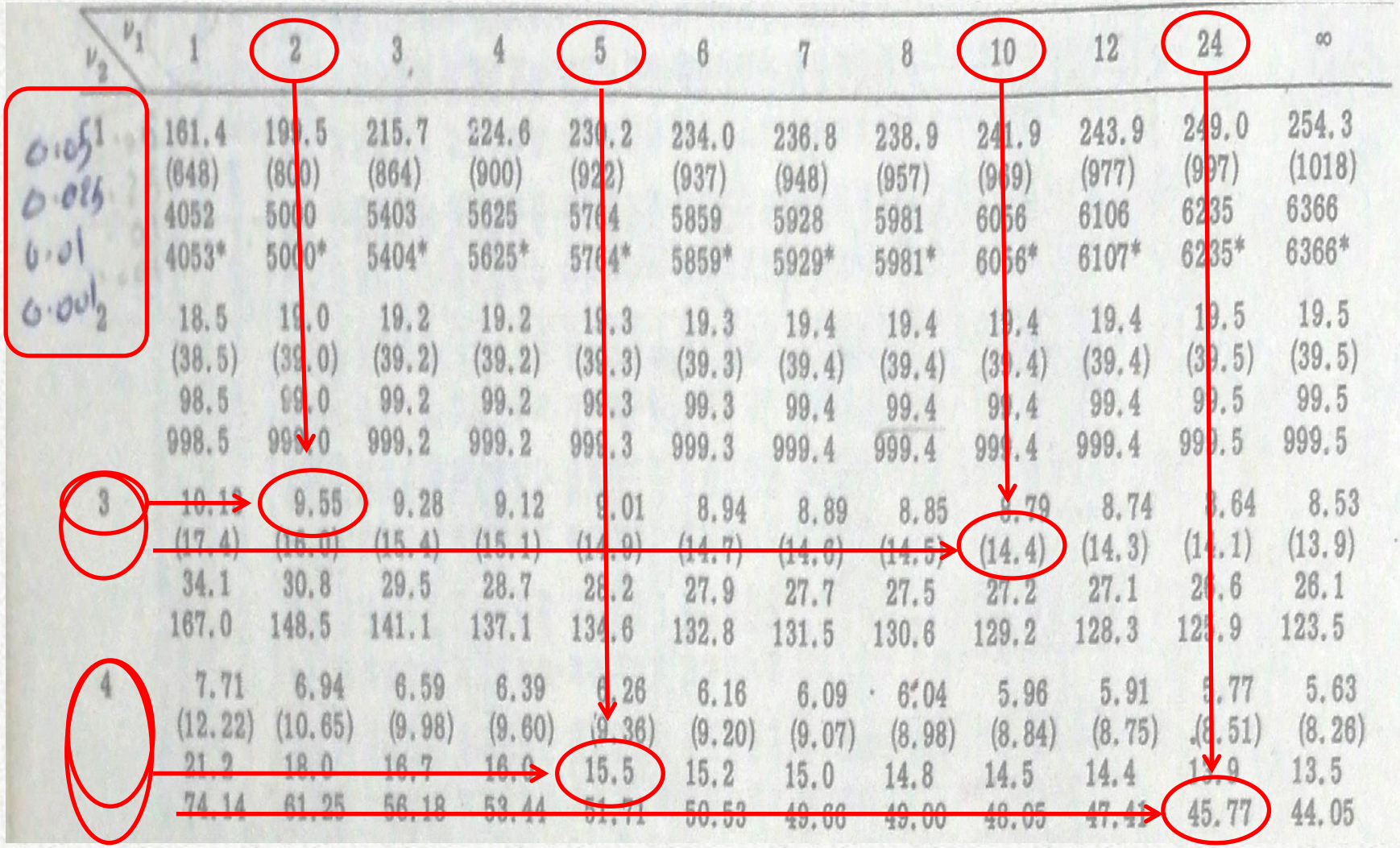
ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	241.9	243.9	249.0	254.3
	(648)	(800)	(864)	(900)	(922)	(937)	(948)	(957)	(969)	(977)	(997)	(1018)
	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6056	6106	6235	6366
	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6056*	6107*	6235*	6366*
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5
	(38.5)	(39.0)	(39.2)	(39.2)	(39.3)	(39.3)	(39.4)	(39.4)	(39.4)	(39.4)	(39.5)	(39.5)
	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5
	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.64	8.53
	(17.4)	(16.0)	(15.4)	(15.1)	(14.9)	(14.7)	(14.6)	(14.5)	(14.4)	(14.3)	(14.1)	(13.9)
	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.6	26.1
	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.5	130.6	129.2	128.3	125.9	123.5
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.77	5.63
	(12.22)	(10.65)	(9.98)	(9.60)	(9.36)	(9.20)	(9.07)	(8.98)	(8.84)	(8.75)	(8.51)	(8.26)
	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	13.9	13.5
	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.05	47.41	45.77	44.05
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.53	4.36
	(10.01)	(8.43)	(7.76)	(7.39)	(7.15)	(6.98)	(6.85)	(6.76)	(6.62)	(6.52)	(6.28)	(6.02)
	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.05	9.89	9.47	9.02
	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	26.92	26.42	25.14	23.79
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.84	3.67
	(8.81)	(7.26)	(6.60)	(6.23)	(5.99)	(5.82)	(5.70)	(5.60)	(5.46)	(5.37)	(5.12)	(4.85)

• ايجاد القيمة الجدولية لـ F





$$F_{(0.05,2,3)} = 9.55 \;;\; F_{(0.01,5,4)} = 15.5 \;;\; F_{(0.025,10,3)} = 14.4 \;;\; F_{(0.005,24,4)} = 45.77$$



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	24	∞
0.05	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	241.9	243.9	249.0	254.3
0.025	(648)	(800)	(864)	(900)	(922)	(937)	(948)	(957)	(969)	(977)	(997)	(1018)
0.01	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6056	6106	6235	6366
0.005	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6056*	6107*	6235*	6366*
	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5
	(38.5)	(39.0)	(39.2)	(39.2)	(39.3)	(39.3)	(39.4)	(39.4)	(39.4)	(39.4)	(39.5)	(39.5)
	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5
	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.64	8.53
	(17.4)	(16.0)	(15.4)	(15.1)	(14.9)	(14.7)	(14.6)	(14.5)	(14.4)	(14.3)	(14.1)	(13.9)
	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.6	26.1
	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.5	130.6	129.2	128.3	125.9	123.5
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.77	5.63
	(12.22)	(10.65)	(9.98)	(9.60)	(9.36)	(9.20)	(9.07)	(8.98)	(8.84)	(8.75)	(8.51)	(8.26)
	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	13.9	13.5
	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.05	47.41	45.77	44.05

مثال: في دراسة لمعرفة أثر الكلوكوز في إفراز الانسولين لغرض تحفيز الانسجة البنكرياسية في جسم المريض ومعالجة نسبة السكري في الدم تم اختيار مجموعة من المرضى المصابين بمرض السكري، وتم اعطائهم جرعات مختلفة لكل مجموعة حيث كانت مكونه من اربعة تراكيز للكلوكوز ومن ثم تم تحديد كمية الانسولين المفرز في الجسم والنتائج موضحة في الجدول ادناه، من اجل معرفة اذا ما كان هناك فروقات معنوية بين الاربعة تراكيز لغرض العلاج، وقد تم تحديد مستوى المعنوية عند 5%.

Treatment	Yij Observation					
t1	4.4	5	3.5	4.5	5.5	4.1
t2	3.7	3.9	3.8	4	3.8	4.4
t3	3.5	4.4	3.3	3.3	3.3	3.8
t4	3	2.8	2.1	3.2	4	4

Sol/

- فرضية العدم والبديلة

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 \qquad ; k = 4; n = 6$$

- النموذج الرياضي للتحليل بمعيار واحد او اتجاه واحد (تصميم عشوائي كامل) هو:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i=1,2,3,4 \; ; \quad j=1,2,3,4,5,6$$

- مخطط التجربة

t1	t4	t1	t4	t3	t2
t2	t4	t1	t3	t1	t3
t1	t4	t2	t3	t2	t1
t2	t4	t3	t4	t2	t3

- **درجات الحرية (Digress of freedom)**

١. درجة حرية بين المعاملات $d.f_B = k-1 = 4-1 = 3$

٢. درجة حرية الاخطاء المعاملات $d.f_e = k\times(n-1) = 4\times(6-1) = 20$

٣. درجة حرية الكلية للمعاملات $d.f_T = k\times n-1 = 4\times 6-1 = 23$

- **مجموع مربعات الانحرافات (Sum of Squares (S.S))**

C: معامل التصحيح $C = \frac{(Y..)^2}{k\,n} = \frac{(91.3)^2}{4\times 6} = \frac{8335.69}{24} = 347.3$

١. **مجموع مربعات الانحرافات الكلية**

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - C = (4.4)^2 + (5)^2 + \cdots + (4)^2 - 347.3$$

$$\therefore SST = 359.29 - 347.3 = 11.97$$

٢. مجموع مربعات الانحرافات للمعاملات

$$SS_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i^2.}{n} - C = \frac{(27)^2 + (23.6)^2 + (21.6)^2 + (19.1)^2}{6} - 347.3$$

$$\therefore SS_B = \frac{2117.33}{6} - 347.3 = \underline{\underline{5.58}}$$

٣. مجموع مربعات الانحرافات للأخطاء

$$\therefore SSe = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i^2.}{n} 359.29 - 352.889 = \underline{\underline{6.39}}$$

Or

$$\therefore SSe = SST - SS_B = 11.97 - 5.58 = \underline{\underline{6.39}}$$

- **متوسط مربعات انحرافات**

$$\therefore MS_B = \frac{SS_B}{k-1} = \frac{5.58}{3} = \underline{\underline{1.86}}$$

$$\therefore MSe = \frac{SSe}{k \times (n-1)} = \frac{6.39}{20} = \underline{\underline{0.35}}$$

- **المختبر الاحصائي F**

$$\therefore F_{cal} = \frac{MS_B}{MSe} = \frac{1.86}{0.35} = \underline{\underline{5.31}}$$

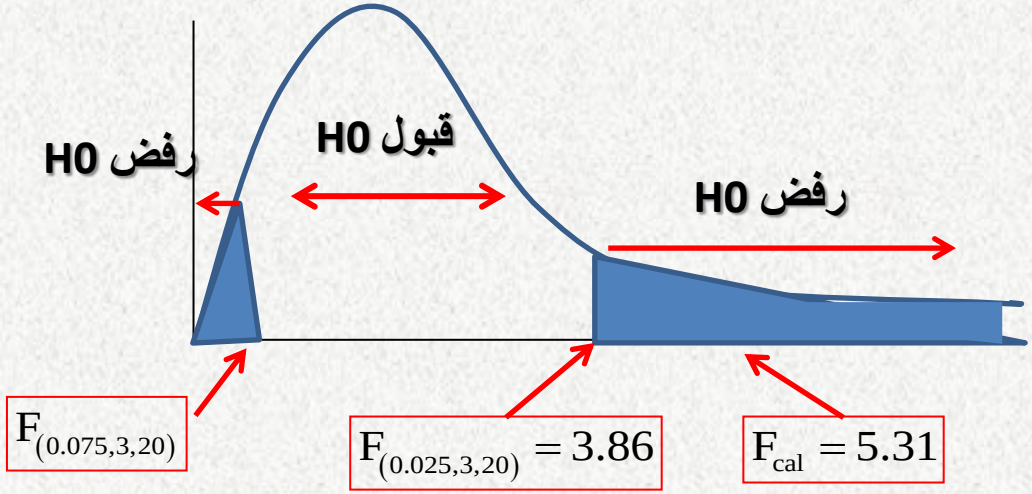
- **القيمة الجدولية لـ F**

$$\therefore F_{\left(\frac{\alpha}{2},(k-1),k(n-1)\right)} = F_{(0.025,3,20)} = \underline{\underline{3.86}}$$

جدول تحليل التباين بمعيار واحد او اتجاه واحد :

ANOVA مصادر التباين	Digress of Freedom درجة الحرية (d.f)	Sum of Squares مجموع مربعات الانحرافات (S.S)	Mean of deviation متوسط انحرافات (M.S)	Test of Stat. المختبر الاحصائي (F)	Table of F
Between of Treatments بين المعاملات	3	$SS_B = 5.58$	$MS_B = 1.86$	$F_{cal} = 5.31$	$F_{(0.025,3,20)} = 3.86$
Within of error داخل الاخطاء	20	$SSe = 6.39$	$MSe = 0.35$		
Total	23	$SST = 11.97$			

- منحنى توزيع F



- القرار:

نلاحظ ان ($F_{cal} > F_{table}$) فضلاً عن وقوع القيمة المحسوبة في منطقة الرفض (H_0) مما يدل على رفض فرضية العدم والقبول بالفرضية البديلة التي تدل على وجود فروق معنوية بين المتوسطات الخاصة بالتراكيز الكلوكوز وتأثيرها على الافراز الانسولين في الانسجة من البنكرياس في الجسم.