Lecture -12-

chapter five

"Probability Distributions"

التوزيعات الاحتمالية

5.1 : Discrete probability distribution: التوزيعات الاحتمالية المنقطعة

1) Uniform distribution التوزيع المنتظم

Suppose that a random variable X take on a finite set of real number $(1, 2, \dots, n)$ and have the probability density function as given belows:

اذا كان المتغير العشوائي X يأخذ مجموعة محدودة من الارقام الحقيقية $(1, 2, \dots, n)$ وتملك دالة كثافة الاحتمال الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , X = 1, 2, \dots, n \\ 0 & , o.w. \end{cases}$$

The r.v. X is said to be a discrete uniform random variable if it has the form of the p.d.f. a

يقال للمتغير العشوائي X انه متغير عشوائي ذا توزيع منتظم منقطع اذا كانت دالة كثافة احتماله هي الدالة اعلاه.

* ان التوزيع المنتظم المنقطع يحقق دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ في ذا عينة وهي $(\frac{1}{n})$ اي ان $f(x) > 0$ وان مجموع الدالة لكل قيم X يساوي الواحد اي ان

$$\sum_{x=1}^{n} f(x) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ من الحدود}} = n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

ويمكن التعبير عن ان المتغير X ذا توزيع منتظم بالآتي

$X \sim U(n)$ وهذه تقرأ (المتغير العشوائي X يتوزع توزيعاً منتظماً باطلاقة n)

↑ يتوزع

EX: (1)

Suppose that we numbered five balls from 1 to 5 and we selected one ball at random. Let X be the number of the selected ball. Find the probability density function of X.

لنفرض اننا قمنا بترقيم خمس كرات من 1 الى 5 واخترنا كرة واحدة عشوائياً. ولنفرض ان المتغير العشوائي X يمثل رقم الكرة المختارة. اوجد دالة كثافة احتمال المتغير X.

Sol.:

في هذه المسألة المتغير العشوائي X يمثل الأرقام على الكرات لاحظ ذكر بأنه يمثل الرقم على الكرة المختارة، وان الكرة المختارة ممكن ان تكون أي واحدة من الكرات الخمس وعليه يكون المتغير X بالقيم الآتية:

$X = 1, 2, 3, 4, 5$

وان احتمال اختيار اي كرة من الكرات هو

$$f(x) = P(X) = \frac{1}{5} \quad , \quad x = 1$$
$$f(x) = \frac{1}{5} \quad , \quad x = 2$$
$$f(x) = \frac{1}{5} \quad , \quad x = 3$$
$$f(x) = \frac{1}{5} \quad , \quad x = 4$$
$$f(x) = \frac{1}{5} \quad , \quad x = 5$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

وعليه يمكن القول بان $X \sim U(5)$ اي ان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم بمعلمة $(n=5)$ وذلك لان دالة كثافة احتماله كانت $\frac{1}{5}$ والتي تمثل $\frac{1}{n}$ وان $X = 1, 2, \dots, n$.

EX: (2)

A dice is thrown once. Define a random variable X is the number shown by the dice. Find the probability density function of x.

رمي زهر النرد مرة واحدة، عرف المتغير العشوائي X بانه العدد الذي يظهر على الزار. اوجد دالة كثافة احتمال المتغير X.

Sol.:

∴ المتغير العشوائي X مثل الرقم الذي سوف يظهر على الزار فان X سوف يأخذ الاعداد من 1 الى 6:

$X = 1, 2, \dots, 6$

وان احتمال (او دالة احتمال) ظهور أي نقطة من نقاط الزار هو:

$f(x) = \frac{1}{6} \quad x = 1$

$f(x) = \frac{1}{6} \quad x = 2$

$f(x) = \frac{1}{6} \quad x = 6$

اي ان

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$\therefore X \sim U(6) \quad (n=6)$ اي ان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم بمعلمة

* Properties of unifor distribution:

① $E(X) = \sum_{x=1}^{n} x\, f(x)$ توقع X (متوسط التوزيع)

$$= \sum_{x=1}^{n} x \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1+2+3+\dots+n)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$$

ان $\sum_{x=1}^{n} x$ والتي تمثل حاصل جمع الاعداد من 1 الى n يجب حفظ الصيغة الخاصة لأي عدد n .

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore E(X) = \frac{n+1}{2}$$

② Variance of X

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$EX^2 = \sum_{x=1}^{n} x^2 f(x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$\therefore E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{(n+1)^2}{2^2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right]$$

$$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{4n+2-3n-3}{6}\right] = \frac{n+1}{2}\left[\frac{n-1}{6}\right]$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\therefore V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

③ Cumulative distribution function :

$$F(X) = \sum_{x=1}^{X} \frac{1}{n} = \frac{X}{n}$$

هذه دالة التراكمية للتوزيع المنتظم .

2) Bernoulli distribution توزيع برنولي

Suppose that the trial whose outcome can be classified as either a "success" or as a "failure" is performed. Let X be a r.v. taking value (1) if the outcome is success and (0) if it is failure, then X is said to be a Bernoulli random variable and its p.d.f. is given by :

نفترض ان التجربة التي يمكن تصنيف نتائجها على انها اما نجاح او فشل .
وان X متغير عشوائي يأخذ القيمة (1) عند النجاح ، والقيمة (0) عند الفشل ، يمكن القول ان X يتوزع توزيع برنولي

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad , \quad x = 0, 1 \quad , \quad 0 \le p \le 1$$

وان دالة كثافة الاحتمال تعطى بالصيغة

p : تمثل احتمال النجاح للتجربة (اي احتمال المطلوب من السؤال) .

$$f(X=1) = P(\text{the trial outcome is success}) = p$$

احتمال نجاح المحاولة او التجربة

$$f(X=0) = P(\text{the trial outcome is failure}) = 1-p = q$$

احتمال فشل المحاولة (التجربة)