الفصل الخامس

تصاميم المربع اللاتيني وغيره من المربعات المتشابهة

Latin Square Design and Other Similar Design

(٥ : ١) تعريف تصميم المربع اللاتيني :

Definition of L.S.Design

تصميم المربع اللاتيني (L.S.D) هو ذلك التصميم الذي يتم فيه تجميع الوحدات التجريبية غير المتجانسة الى مجموعات تضم كل منها وحدات تجريبية متجانسة بعدد المعاملات الداخلة في التجربة على ان يتم هذا التجميع في اتجاهين . يسمى احدهما صفوفا Rows ويسمى الاخر اعمدة Columns . ومعنى ذلك ان كل صف وكل عمود ما هو الا قطاع كامل (او مكرر كامل) وبحيث ان كل معاملة لا تظهر غير مرة واحدة – وواحدة فقط – في كل صف وكل عمود ، وعليه فان كل من عدد الاعمدة وعدد الصفوف يكون مساويا لعدد المعاملات ، ويكون عدد الوحدات التجريبية المطلوبة لتطبيق تجربة ما باستخدام هذا التصميم مساويا لمربع عدد المعاملات المطلوب دراستها في تلك التجربة ، ومن هنا جاء اسم هذا التصميم وذلك نظرا لأن الاحرف اللاتينية تستخدم لتمييز المعاملات عند توزيعها عشوائيا داخل كل صف وكل عمود في المربع .

وكمثال لتوضيح طبيعة مثل هذه التجارب ، نفرض اننا نريد دراسة تأثير خمس معاملات تسميد في احدى التجارب ، وعند تخطيط التجربة لوحظ ان الحقل المخصص لاجرائها يظهر اختلافا في درجة الخصوبة يتجه من الشمال الى الجنوب ، واختلافا اخر يتجه من الشرق الى الغرب ، فلكي يمكن فصل هذه التأثيرات الناتجة عن وجود خطأ منتظم في هذين الاتجاهين – عن الخطأ التجريبي لكي نزيد من دقة وكفاءة التجربة ،

تظهر اهمية عمل قطاعات عمودية على كل من الاتجاهين السابقين بحيث يحتوي كل منها على خمس قطع تجريبية (بعدد المعاملات) ، وبذلك يتكون مربع مكون من خمس وعشرين قطعة تجريبية (وليس معنى ذلك طبعا ان تكون المساحة المخصصة مربعة الشكل ، بل كل ما نعنيه ان عدد الوحدات التجريبية في كل اتجاه يكون متساويا ومساويا لعدد المعاملات) ، ثم نقوم بعد ذلك في توزيع المعاملات داخل القطاعات التي تسمى في احد الاتجاهات صفوفا وفي الاتجاه الآخر – العمودي على الاول – اعمدة ، وذلك مع ملاحظة الشرط الاساسي الذي سبق ذكره وهو عدم ظهور اي معاملة غير مرة واحدة فقط في اي صف واي عمود .

وكمثال اخر ، نفترض ان المشكلة المراد دراستها في احدى التجارب هي اختبار اربع ماكنات لمعرفة ما اذا كانت تختلف معنويا في مقدار جودة تصنيع منتج ما ومن المعروف طبعا ان اختلاف عمال التشغيل وكذلك اختلاف اوقات التشغيل خلال يوم العمل يؤثران على طبيعة وجودة الانتاج . وعلى ذلك يمكن اختيار اربع عمال (كأعمدة) واربع فترات تشغيل (كصفوف) ثم نوزع الماكنات (المعاملات) على الخلايا المختلفة (الستة عشر) في مخطط المربع اللاتيني مع التأكد من توفير الشرطين فان كل ماكنة لا تشغل غير مرة واحدة فقط بواسطة كل من العمال ، ولا تشغل كذلك غير مرة واحدة في كل من فترات التشغيل .

ولقد استخدم هذا التصميم في كثير من فروع الابحاث المختلفة وذلك عندما يكون هناك مصدرين رئيسيين للاختلافات (الخطأ المنتظم) بين الوحدات التجريبية التي سيتم استخدامها في التجربة وذلك للعمل على زيادة دقتها وكفاءتها .

ولما كانت الصفوف والاعمدة ماهي الا أسماء عامة تشير الى طرق التقسيم بين الوحدات التجريبية ، فقد يكونان نوعين من طرق تطبيق أو اجراء المعاملات – كما لاحظنا في المثال الثاني – وذلك بافتراض عدم وجود أي تداخل بين الصفوف والأعمدة والمعاملات . أما اذا كان هناك تداخلاً بين أي أثنين أو بين جميع طرق التقسيم (الصفوف والاعمدة والمعاملات) . ، فإن قيمة F المحسوبة في هذه الحالة لاتتبع توزيع F الجدولية العشوائي المستقل وبذلك فإن اختبارات المعنوية تكون غير صحيحة .

(٥ : ٢) ميزات التصميم وعيوبه Advantages and Disadvantages

(١) من الممكن تلخيص مميزات تصميم المربع اللاتيني (L.S.D) عن التصاميم الأخرى فيما يلي :

أ- باستخدام التجميع (أو عمل قطاعات متجانسة) في اتجاهين يتمكن تصميم المربع اللاتيني من التحكم في الاختلافات الموجودة أصلاً بين الوحدات التجريبية بدرجة اكبر من التصميمين السابقين وبالتالي يكون تباين الخطأ أصغر ، مما يؤدي الى زيادة كفاءة ودقة التجربة .

ب- التحليل الأحصائي للبيانات بسيط ، وليس هناك غير تعقيد بسيط جداً اكثر من تحليل تجارب تصميم القطاعات العشوائية الكاملة .

جـ- لايزال التحليل الأحصائي بسيطاً نسبياً حتى في حالة فقد قيم بعض المشاهدات .

٢- أما عيوب هذا التصميم فهي :

أ- يتحدد عدد المعاملات بعدد الصفوف وعدد الأعمدة . وهذا يعتبر قيداً على حرية الباحث عند تخطيط التجربة . فكلما زاد عدد المعاملات ارتفع عدد الوحدات التجريبية المطلوبة بطريقة سريعة ، ففي تجربة تحتوي على ٤ معاملات يكون عدد الوحدات التجريبية المطلوبة ١٦ (٤ صفوف × ٤ أعمدة) ، فاذا تضاعف عدد المعاملات واصبحت ٨ ، فإن عدد الوحدات التجريبية المطلوبة يصبح ٦٤ وحدة موزعة في ٨ صفوف و ٨ أعمدة . وطبعاً كلما زاد عدد الوحدات التجريبية زاد الخطأ التجريبي . ولذلك لاينصح باستخدام هذا التصميم لأكثر من ٨ معاملات .

ب- عند استخدام هذا التصميم في حالة تجارب تحتوي على عدد قليل من المعاملات فإن درجات حرية الخطأ تكون قليلة ، وبالتالي ترتفع قيمة تباين الخطأ مما يؤدي الى اتخاذ قرارات خاطئة (رفض نظريات صحيحة) ، ففي حالة مربع لاتيني ٢×٢ (أي لمعاملتين) لايكون هناك درجات حرية متبقية للخطأ ، وفي حالة ٣×٣ يكون هناك درجتي حرية فقط ، أما في حالة ٤ × ٤ فتكون هناك ٦ درجات حرية للخطأ . ومع ذلك لاينصح باستخدام هذا التصميم في حالة قلة عدد المعاملات عن أربعة .

(٥ : ٣) أساس عمل قطاعات في اتجاهين

Principle of 2-way Blocking

لنفرض احتياجنا الى ٩ وحدات تجريبية لتطبيق احدى التجارب (ثلاث معاملات) ، وكانت الوحدات المتاحة تختلف في كل من الشكل واللون ، كما هوموضح في شكل (٥-١).

ان الافتراض الاساسي الواجب توفره في هذه الحالة هو ان الشكل واللون يعملان بطريقة اضافية ومستقلان عن بعضهما (بالنسبة لتاثير المعاملات) وانه لايوجد اي تداخل بين الثلاثة (الشكل والحجم والمعاملات) . وعلى ذلك فان الخطوة الاولى هي تجميع الوحدات التجريبية

التسع الى ثلاث مجموعات (او قطاعات) متجانسة حسب احد مصادر الاختلاف وليكن الشكل مثلاً كما فعلنا في الفصل السابق ، وكما هوموضح في شكل (٤ – ١) ، وبذلك يكون عندنا ثلاث قطاعات يضم كل منها ثلاث وحدات تجريبية متجانسة في الشكل ولتسمى هذه اعمدة . والخطوة الثانية هي تقسيم الوحدات حسب المصدر الثاني للاختلاف–وهو اللون– الى ثلاث قطاعات كذلك نسميها صفوفا ويضم كل منها ثلاث وحدات تجريبية من نفس اللون . وبعد ذلك تأتي الخطوة الثالثة وهي توزيع المعاملات عشوائيا داخل كل قطاع ولكن بشرط اساسي وهو عدم ظهور اي معاملة غير مرة واحدة فقط في كل صف وفي كل عمود . وكما نلاحظ في شكل (٥–١) فان الاعمدة ماهي الاقطاعات اقيمت على اساس الشكل ، والصفوف ماهي الا قطاعات اقيمت على اساس اللون .

(٥ : ٤) اقامة تجارب التصميم وتنظيمها

Construction and Arrangements

بالنسبة لتجارب تصميم المربع اللاتيني التي تحتوي على معاملتين (اي مربع لاتيني ٢×٢) ، فلا يوجد غير مربع قياسي واحد وهو المربع الذي تتشابه فيه الصفوف والاعمدة المتناظرة ، اي الصف الاول مثل العمود الاول والصف الثاني مثل العمود الثاني وتكون المعاملات في الصف الاول والعمود الاول بترتيبها الطبيعي ويكون المربع في هذه الحالة :

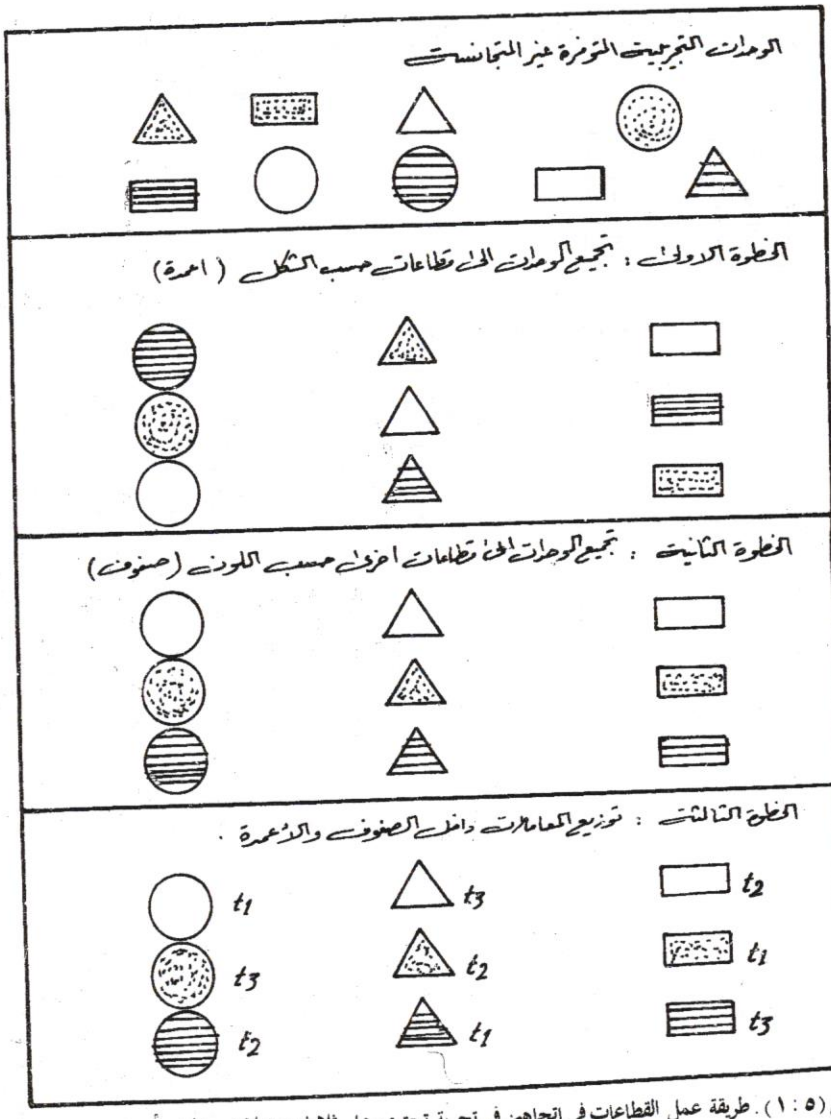
A	B
B	A

ويمكن وضع هذا المربع في صورتين اي تنظيمه بشكلين واختيار احدهما لتطبيق التجربة ، وتحسب عدد الاشكال او التنظيمات الممكنة لاي مربع قياسي بمعرفة عدد الصفوف (او الاعمدة او المعاملات) ويرمز لها بالرمز (r) ثم حساب عدد التوافيق والتباديل بينها من المعادلة . .

$$\text{No. of arrangments} = r!\,(r - i)\,!$$

وعلى ذلك فعدد التنظيمات الممكنة للجدول القياسي السابق هي :–

$$r!\,(r-1)\,! = 2!(2-1)\,! = 2$$



شكل (٥ : ١) . طريقة عمل القطاعات في اتجاهين في تجربة تحتوي على ثلاث معاملات وتطبق بأستخدام تصميم المربع اللاتيني ٣ × ٣

وهذين الشكلين هما :

A	B
B	A

B	A
A	B

اي الشكل القياسي وشكل اخر ناتج من اعادة توزيع الصفين او العمودين .

وبالنسبة للمربع اللاتيني ٣×٣ (اي التجارب التي تحتوي على ٣ معاملات) . فلا يوجد كذلك غير مربع قياسي واحد وهو :

A	B	C
B	C	A
C	A	B

غير ان عدد التنظيمات الممكنة لهذا الجدول هو ١٢ شكلا وذلك لان :

$$r!(r-1)! = 3!(3-1)! = 12$$

اي انه في حالة المربع اللاتيني ٣×٣ يوجد مربع قياسي و ١١ مربع غير قياسي وهي الاشكال التي نحصل عليها من اعادة ترتيب المربع القياسي السابق .

اما في حالة المربع اللاتيني ٤×٤ ، فمن الممكن الحصول على اربع مربعات قياسية وهي :

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	D	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

ومن كل مربع قياسي يمكن الحصول على ١٤٤ شكلا او تنظيما وذلك لان :

$$r!(r-1)! = 4!(4-3)! = 144$$

وعلى ذلك ففي حالة المربع اللاتيني ٤×٤ يمكن الحصول على ٥٧٦ شكلا او مربعا منها اربع مربعات قياسية . وفي حالة المربع اللاتيني ٥×٥ ، يكون هناك ٥٦ مربعا قياسيا ويمكن الحصول على ٢٨٨٠ شكلا لكل منها ، اي ان مجموع الاشكال الكلية الممكن الحصول عليها هو ١٦١٢٨٠ شكلا .

اما في حالة المربع اللاتيني ٦×٦ فترفع الارقام كثيرا ، حيث ان عدد المربعات القياسية في هذه الحالة يكون ٩٤٠٨ ولكل منها ٨٦٤٠٠ شكلا او اعادة تنظيم ولذلك يصل مجموع المربعات الممكنة الى ٨١٢٨٥١٢٠٠ مربعا .

والجدول (٥–١) : يلخص المعلومات السابقة .

جدول (٥-١) : حساب أعداد الاشكال المختلفة للمربعات اللاتينية الممكن الحصول عليها تبعاً لاختلاف حجم المربع المستخدم .

حجم المربع Size of Square	عدد الأشكال القياسية No. of Standard forms	عدد الأشكال الممكنة من كل مربع قياسي $r!(r-1)!$	العدد الكلي للمربعات المختلفة Total No. of different squares
3 × 3	1	12	12
4 × 4	4	144	576
5 × 5	56	2880	161280
6 × 6	9408	86400	812851200

(٥ : ٥) التوزيع العشوائي : Randomization

لقد قام Fisher and Yates باعطاء صورة كاملة للمربعات اللاتينية من ٤×٤ والى ٦×٦ كما أعطيا كذلك عينة من المربعات الى ١٢ × ١٢ .

وان طريقة التوزيع العشوائي هي :

١- نختار اولاً وبصورة عشوائية احد المربعات القياسية الممكنة .

٢- ثم نقوم بتنظيم كل من الصفوف والاعمدة والمعاملات بصورة عشوائية وبطريقة مستقلة عن الاخرين . وكمثال ايضاحي نفرض أن المطلوب هو المربع اللاتيني ٤ × ٤ . فيتم التوزيع العشوائي باتباع الخطوات التالية :

١- نختار عشوائياً احد المربعات القياسية الممكنة ، ولنفرض أننا اخترنا المربع :

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

٢- باستخدام احد جداول الأرقام العشوائية نعيد تنظيم صفوف الجدول السابق ولنفرض أن التنظيم الجديد أصبح r_1 ثم r_4 ثم r_2 وأخيراً r_3 وبذلك نحصل على مربع جديد وهو :

A	B	C	D
D	A	B	C
B	C	D	A
C	D	A	B

٣- بعد ذلك نعيد تنظيم الصفوف بصورة عشوائية ، ولنفرض أن النظام الجديد أصبح C_2 ثم C_1 ثم C_4 وأخيراً C_3 ، فإن المربع السابق يصبح كما يلي :

B	A	D	C
A	D	C	B
C	B	A	D
D	C	B	A

٤- وأخيراً توزع المعاملات توزيعاً عشوائياً على الأحرف اللاتينية المستخدمة في الجدول ولنفرض اننا حصلنا على الأرقام العشوائية بهذا الترتيب ٢ ، ٤ ، ٣ ، ١ فان هذ يعني :

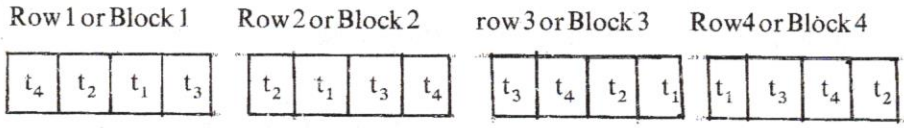
$$A = t_2 , B = t_4 , C = t_3 \text{ and } D = t_1$$

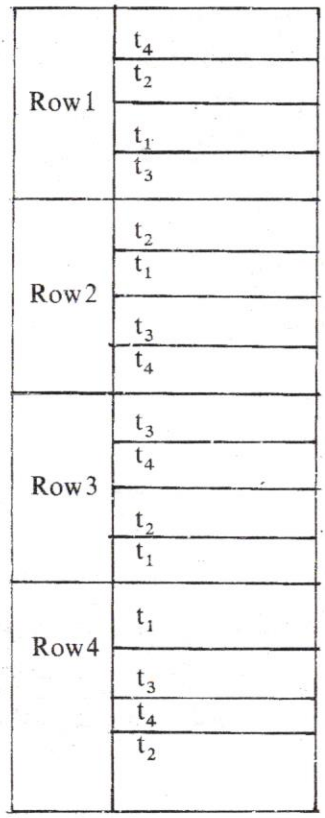
وعلى ذلك فإن الشكل التخطيطي للتجربة المقترحة سوف يصبح كما يلي :

	c_1	c_2	c_3	c_4
r_1	t_4	t_2	t_1	t_3
r_2	t_2	t_1	t_3	t_4
r_3	t_3	t_4		t_1
r_4	t_1	t_3	t_4	t_2

ومن الملاحظ عادة عند تخطيط التجارب الحقلية ان القطع التجريبية تمثل بشكل مربع كما في الشكل السابق ، غير أنه في بعض الحالات قد يكون مرغوباً وضع المعاملات- الموجودة في صف ما- في قطاع صغير ، بحيث أن القطاعات تكون هي الصفوف ويكون النظام أو الترتيب داخل القطاعات ممثلاً للاعمدة . والشكل (٥-٢) يمثل تصميم المربع اللاتيني على أساس هذا التخطيط .

شكل (٥-٢) تجربة مصممة على أساس المربع اللاتيني غيرأن الصفوف موجودة على هيئة قطاعات صغيرة والوحدات التجريبية داخلها تمثل الأعمدة .





(٥ : ٦) استخدام التصميم مع تسجيل مشاهدة واحدة لكل وحدة تجريبية

Latin Square Design With. One Observation Per Experimental Unit

(١) تمثيل البيانات برموز جبرية Symbolical representation of the data

سوف نستخدم في هذه الحالة ثلاثة رموز لتمييز كل مشاهدة ، وعلى ذلك فإن $y_{ij(k)}$ سوف تشير الى قيمة المشاهدة الخاصة بالوحدة التجريبية التي أخذت المعاملة k والموجودة في الصف i والعمود j . ولكي يمكننا تتبع ذلك ، نفرض أن احدى التجارب كان مخططها الحقلي كما في شكل (٥ : ٣) .

	C_1	C_2	C_3	C_4
r_1	t_4	t_2	t_1	t_3
r_2	t_2	t_1	t_3	t_4
r_3	t_3	t_4	t_2	t_1
r_4	t_1	t_3	t_4	t_2

شكل (٥-٣) المخطط الحقلي لتجربة تحتوي على أربع معاملات ومصممة على أساس المربع اللاتيني

فان بيانات مثل هذه التجربة (اي المشاهدات المسجلة من الوحدات التجريبية) يمكن تمثيلها برموز كما هو موضح في جدول (٥ - ٢) ، والذي يعطي فكرة عامة عن طريقة تمثيل بيانات تجارب المربع اللاتيني برموز لكي يمكننا بعد ذلك تتبع النموذج الرياضي للتصميم وتقديرات التأثيرات وطريقة التحليل الاحصائي للبيانات .

(٢) النموذج الرياضي Linear Model

يمكن تمثيل قيمة اي مشاهدة في تجربة المربع اللاتيني بالمعادلة الخطية التالية :

$$y_{ij(k)} = \mu + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + e_{ij(k)} \qquad \begin{cases} i = 1,2,\ldots,r \\ j = 1,2,\ldots,c \\ k = 1,2,\ldots,t \\ r = c = t \end{cases}$$