احصاء حيوي

الكورس الاول

(موضوع المحاضرة)

اختبارات تتعلق بالمتوسطات تحليل التباين بمعيارين (اتجاهين)

Dr.Safwan Nathem Rashed

- **تقدير معلمات النموذج تحليل التباين (اتجاهين)**

يمكن تقدير معلمات النموذج الرياضي للتحليل:

$$Y_{ij} = \mu + \rho_j + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i=1,2,...,k \quad ; \quad j=1,2,...,n$$

حيث ($\mu, \rho_j, \tau_i, \varepsilon_{ij}$) يمثلون معلمات النموذج وباستخدام البيانات المأخوذة من المجتمع قيد الدراسة وكالاتي:

$$\hat{\mu} = \bar{Y}..; \ \hat{\rho}_j = \bar{Y}._j - \bar{Y}..; \hat{\tau}_i = \bar{Y}_i. - \bar{Y}..; \hat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i. - \bar{Y}._j$$

وبجمع هذه المقدرات الثلاثة نحصل على:

$$\therefore Y_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\rho}_j + \hat{\tau}_i + \hat{\varepsilon}_{ij}$$

- **تجزئة مجموع مربعات الانحرافات الكلية.**

يمكن تجزئة مجموعة الانحرافات الكلية الى مكوناتها وهي اساس تحليل التباين للنموذج العام وعلى النحو الاتي:

$$\therefore Y_{ij} = \mu + \rho_j + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

وبالتعويض عن معلمات النموذج بقيمها التقديرية وعدة عمليات نحصل على:

$$Y_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\rho}_j + \hat{\tau}_i + \hat{\varepsilon}_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}..\right)^2 = k\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{Y}._j - \bar{Y}..\right)^2 + n\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{Y}_i. - \bar{Y}..\right)^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_i.\right)^2$$

$$\therefore SST = SS_{B(Columns)} + SS_{B(Rows)} + SSe$$

حيث ان:

SST : مجموع مربعات انحرافات الكلية

Total sum of Squares

$SS_{B(Columns)}$: مجموع مربعات انحرافات بين المعاملات في العمدة

Sum of Squares between treatment in Columns

$SS_{t(Rows)}$: مجموع مربعات انحرافات بين المعاملات في الصفوف

Sum of Squares between treatment in Rows

SSe : مجموع مربعات الخطأ

Sum of Squares of error

حيث ان:

عدد المعادلات (الصف) $i=1,2,3,\ldots,k$ عدد المشاهدات (عمود) $j=1,2,3,\ldots n$

Treatment	Yij Observation				مجاميع الصفوف Yi.	متوسط الصفوف $\bar{Y}i.$
	B1	B2	….	Bn		
1	Y11	Y12	…..	Y1n	Y1.	$\bar{Y}1.$
2	Y21	Y22	…..	Y2n	Y2.	$\bar{Y}2.$
3	Y31	Y32	…..	Y3n	Y3.	$\bar{Y}3.$
…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..
k	Yk1	Yk2	…..	Ykn	Yk.	$\bar{Y}k.$
مجاميع الصفوف Y.j	Y. 1	Y. 2	…..	Y. n	Y..	
متوسط الصفوف $\bar{Y}.j$	$\bar{Y}.1$	$\bar{Y}.2$	…..	$\bar{Y}.n$		$\bar{Y}..$

• جدول تحليل التباين(Analysis of Variance Table)

يمكن توضيح نتائج ومعادلات الخاصة بجدول تحليل التباين والمكونات التابعة له (اي الهيكلية العامة له) على النحو الاتي:

- درجات الحرية (Digress of freedom)

١. درجة حرية بين المعاملات في العمود ((between treatments (Columns

$$d.f_B = n - 1$$

٢. درجة حرية بين المعاملات ((between treatments(Rows

$$d.f_t = k - 1$$

٣. درجة حرية الاخطاء داخل المعاملات (within treatment of error)

$$d.f_e = (k-1) \times (n-1)$$

٤. درجة حرية الكلية للمعاملات (total freedom of treatment)

$$d.f_T = k \times n - 1$$

• مجموع مربعات الانحرافات (Sum of Squares (S.S))

١. مجموع مربعات الانحرافات الكلية (sum of square of Total)

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}..\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{\left(Y..\right)^2}{k\,n}$$

$$\therefore SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - C \quad ; \quad C = \frac{\left(Y..\right)^2}{k\,n}$$

C: معامل التصحيح

٢. مجموع مربعات الانحرافات بين الاعمدة ($SS_{B(Columns)}$)

$$\therefore SS_{B(Columns)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\bar{Y}._j - \bar{Y}..\right)^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} Y._j^2}{k} - C$$

$$\therefore \; C = \frac{\left(\bar{Y}..\right)^2}{k\,n}$$ معامل التصحيح

٣. مجموع مربعات الانحرافات بين الصفوف ($SS_{t(Rows)}$)

$$SS_{t(Rows)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{i.}^2}{n} - \frac{\left(Y_{..}\right)^2}{k\,n}$$

$$\therefore SS_{t(Rows)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{i.}^2}{n} - C; \qquad C = \frac{\left(Y_{..}\right)^2}{k\,n}$$

معامل التصحيح

٤. مجموع مربعات الانحرافات للأخطاء (sum of square of error)

$$\therefore SSe = SST - SS_{B(Columns)} - SS_{t(Rows)}$$

- **متوسط مربعات انحرافات**

(Mean Squares of Deviations)

يتم الحصول على متوسط مربعات الانحرافات لكل من المعاملات في الصف والعمود والخطأ من خلال قسمة مجموع مربعات الانحرافات لكل منهم على درجات الحرية الخاصة بهم لنحصل على:

$$\therefore MS_{B(Columns)} = \frac{SS_{B(Columns)}}{n-1}$$

$$\therefore MS_{t(Rows)} = \frac{SS_{t(Rows)}}{k-1}$$

$$\therefore MSe = \frac{SSe}{(k-1)\times(n-1)}$$

- **المختبر الاحصائي F**

وبعدما تم الحصول على التباينات المتمثلة بتباين بين المعاملات في الصف والعمود فضلاً عن تباين الاخطاء، سوف نحصل على قيمتان مختبريتان محسوبتان للمختبر (F) وفق الصيغة الرياضية الاتية:

$$\therefore F_{cal(Columns)} = \frac{MS_{B(Columns)}}{MSe} \sim F_{(\alpha, v_{1(Columns)}, v_2)} = F_{(\alpha,(n-1),(k-1)(n-1))}$$

$$\therefore F_{cal(Rows)} = \frac{MS_{B(Rows)}}{MSe} \sim F_{(\alpha, v_{1(Rows)}, v_2)} = F_{(\alpha,(k-1),(k-1)(n-1))}$$

ونقارن القيمة المحسوبة (Fcal) مع القيمة الجدولية لـ (Ftable) المناظرة لها لغرض اتخاذ القرار المناسب وتحديد تأثير المعاملة في الصف والعمود.

وجدول تحليل التباين بمعيارين يلخص ادناه:

ANOVA مصادر التباين	Digress of Freedom درجة الحرية (d.f)	Sum of Squares مجموع مربعات الانحرافات (S.S)	Mean of deviation متوسط انحرافات (M.S)	Test of Stat. المختبر الاحصائي (F)	Table of F
Between of Treatments Columns المعاملات بين الاعمدة	$n-1$	$SS_{B(Columns)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_{.j}^2}{k} - C$	$MS_{B(Columns)} = \frac{SS_{B(Columns)}}{n-1}$	$F_{cal(Columns)} = \frac{MS_{B(Columns)}}{MSe}$	$F_{(\alpha,(n-1),(k-1)(n-1))}$
Between of Treatments Rows المعاملات بين الصفوف	$k-1$	$SS_{t(Rows)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i}^2.}{n} - C$	$MS_{t(Rows)} = \frac{SS_{t(Rows)}}{k-1}$	$F_{cal(Rows)} = \frac{MS_{t(Rows)}}{MSe}$	$F_{(\alpha,(k-1),(k-1)(n-1))}$
Within of error داخل الاخطاء	$(k-1)(n-1)$	$SSe = SST - SS_{B(Columns)} - SS_{t(Columns)}$	$MSe = \frac{SSe}{(k-1)(n-1)}$		$\therefore C = \frac{(Y..)^2}{kn}$
Total	$k \times n - 1$	$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - C$			

مثال: في تجربة بيطرية لبيان أثر اربعة انواع من الاغذية البروتينية في زيادة اوزان ثلاثة مجاميع من الاغنام في احدى مزارع التربية الحيوانية، وبعد فترة من الزمن تم قياس اوزانها وتم الحصول على النتائج التالية التي تمثل مقدار الزيادة في الوزن الوحدات بالكيلوغرام، وقد تم تحديد مستوى المعنوية عند 5%.

Treatment	Yij Observation			Yi. مجاميع المعادلات	$\bar{Y}$i. متوسط المعادلات
	B1	B2	B3		
t1	18.3	22.6	25.3	Y1.=66.2	$\bar{Y}$1.=22.67
t2	19.2	23.2	24.2	Y2.=66.6	$\bar{Y}$2.=22.2
t3	22.4	22.8	23.3	Y3.=68.5	$\bar{Y}$3.=22.83
t4	21.9	23.8	24.2	Y4.=69.9	$\bar{Y}$4.=23.3
مجاميع العمود Y.j	Y. 1=81.8	Y. 2=92.4	Y. 3=97	Y. .=271.2	
متوسط العمود $\bar{Y}$. j	$\bar{Y}$. 1=20.5	$\bar{Y}$. 2=23.1	$\bar{Y}$. 3=24.3		$\bar{Y}$. .=22.6

Sol/

- فرضية العدم والبديلة

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 \qquad ; k = 4; n = 3$$

- النموذج الرياضي للتحليل بمعيارين او اتجاهين (تصميم قطاعات عشوائية كاملة) هو:

$$Y_{ij} = \mu + \rho_j + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i=1,2,3,4 \; ; \; j=1,2,3$$

- مخطط التجربة

t1	t3	t4	t2
t2	t4	t1	t3
t1	t4	t3	t2

- **درجات الحرية (Digress of freedom)**

١. درجة حرية بين للمعاملات في الاعمدة $d.f_{B(Columns)} = n-1 = 3-1 = 2$

٢. درجة حرية للمعاملات في الصفوف $d.f_{t(Rows)} = k-1 = 4-1 = 3$

٢. درجة حرية الاخطاء المعاملات $d.f_e = (k-1)\times(n-1) = (4-1)\times(3-1) = 6$

٣. درجة حرية الكلية للمعاملات $d.f_T = k\times n-1 = 4\times 3-1 = 11$

- **مجموع مربعات الانحرافات (Sum of Squares (S.S))**

C: معامل التصحيح

$$C = \frac{(Y..)^2}{k\,n} = \frac{(271.2)^2}{4\times 3} = 6129.12$$

١. مجموع مربعات الانحرافات الكلية

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - C = (18.3)^2 + (22.6)^2 + \cdots + (24.2)^2 - 6129.12$$

$$\therefore SST = 6174.44 - 6129.12 = \underline{\underline{45.32}}$$

٢. مجموع مربعات الانحرافات للمعاملات في العمود

$$SS_{B(Columns)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_{.j}^{2}}{k} - C = \frac{(81.8)^2 + (92.4)^2 + (97)^2}{4} - 6129.12$$

$$\therefore SS_{B(Columns)} = 6159.5 - 6129.12 = \underline{\underline{30.375}}$$

٣. مجموع مربعات الانحرافات للمعاملات في الصفوف

$$SS_{t(Rows)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{i}^{2}.}{n} - C = \frac{(66.2)^2 + (66.6)^2 + (68.5)^2 + (69.9)^2}{3} - 6129.12$$

$$\therefore SS_{t(Rows)} = 6132.087 - 6129.12 = \underline{\underline{2.967}}$$

٤. مجموع مربعات الانحرافات للأخطاء

$$\therefore SSe = SST - SS_{B(Columns)} - SS_{t(Rows)}$$

$$= 45.32 - 30.375 - 2.967 = \underline{\underline{11.978}}$$

- **متوسط مربعات انحرافات**

$$\therefore MS_{B(Columns)} = \frac{SS_{B(Columns)}}{n-1} = \frac{30.375}{3-1} = \underline{\underline{15.1875}}$$

$$\therefore MS_{t(Rows)} = \frac{SS_{t(Rows)}}{k-1} = \frac{2.967}{4-1} = \underline{\underline{0.989}}$$

$$\therefore MSe = \frac{SSe}{(k-1)\times(n-1)} = \frac{11.978}{(4-1)\times(3-1)} = \underline{\underline{1.9963}}$$

- **المختبر الاحصائي F**

$$\therefore F_{cal(Columns)} = \frac{MS_{B(Columns)}}{MSe} = \frac{15.1875}{1.9963} = \underline{\underline{7.608}}$$

$$\therefore F_{cal(Rows)} = \frac{MS_{B(Rows)}}{MSe} = \frac{0.989}{1.9963} = \underline{\underline{0.495}}$$

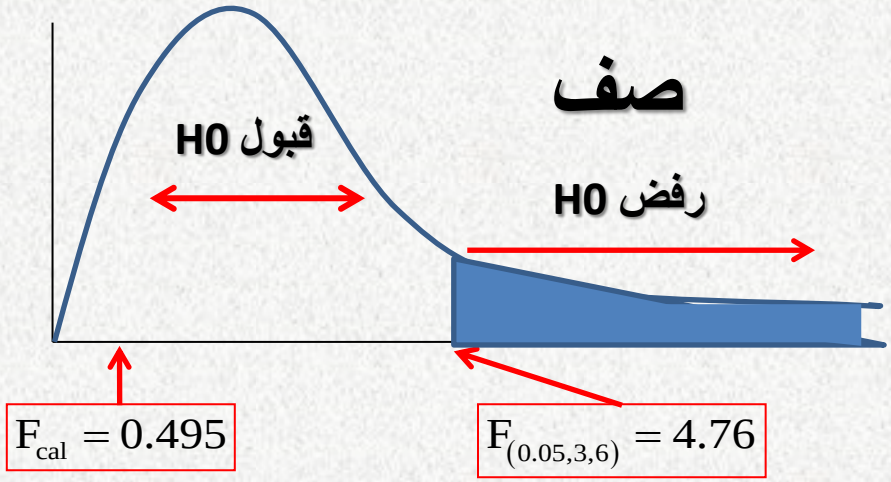
- **القيمة الجدولية لـ F**

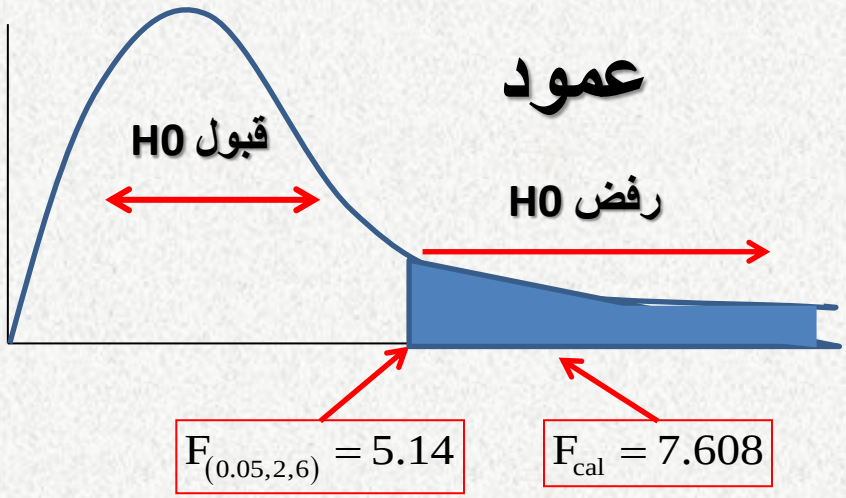
$$F_{(0.05,2,6)} = 5.14 \quad ; \quad F_{(0.05,3,6)} = 4.76$$

وجدول تحليل التباين بمعيارين يلخص ادناه:

ANOVA مصادر التباين	Digress of Freedom درجة الحرية (d.f)	Sum of Squares مجموع مربعات الانحرافات (S.S)	Mean of deviation متوسط انحرافات (M.S)	Test of Stat. المختبر الاحصائي (F)	Table of F
Between of Treatments Columns المعاملات بين الاعمدة	2	$SS_{B(Columns)}$ = 30.375	$MS_{B(Columns)}$ = 15.1875	$F_{cal(Columns)}$ = 7.608	$F_{(0.05,2,6)}$ 5.14
Between of Treatments Rows المعاملات بين الصفوف	3	$SS_{t(Rows)}$ = 2.967	$MS_{t(Rows)}$ = 0.989	$F_{cal(Rows)}$ = 0.495	$F_{(0.05,3,6)}$ 4.76
Within of error داخل الاخطاء	6	SSe = 11.978	MSe = 1.9963		
Total	11	SST = 45.32			

- منحنى توزيع F





- القرار:

نلاحظ ان ($F_{cal}>F_{table}$) في الاعمدة فضلاً عن وقوع القيمة المحسوبة في منطقة الرفض (H_0) مما يدل على رفض فرضية العدم والقبول بالفرضية البديلة التي تدل على وجود فروق معنوية بين المتوسطات في نوعية الاغذية في زيادة الاوزان بين المجاميع الثلاثة ولكن نلاحظ ان ($F_{cal}<F_{table}$) في الصفوف فضلاً عن وقوع القيمة المحسوبة في منطقة القبول (H_0) مما يدل على قبول فرضية العدم ورفض الفرضية البديلة مما تدل على عدم وجود فروق معنوية بين المتوسطات في انواع الاغذية في زيادة الاوزان بين كل مجموعة.

مثال/واجب:

قام احد الباحثين بدراسة تأثير اربع مركبات دوائية في علاج احد الامراض المزمنة وتم اختيار (20) مريض مصابين بهذا المرض وتم تقسيمهم الى خمسة مجاميع وفق الفئات العمرية ثم تم اخضاعهم لهذا المركبات الدوائية وسجلت النتائج العلاجية وكما مبين في الجدول ادناه، احسب تأثير هذا الدواء باستخدام طريقة التحليل التباين بمعيار واحد وكذلك بمعيارين ، وقد تم تحديد مستوى المعنوية عند 5%.

Treatment	Yij Observation				
	1	2	3	4	5
t1=A	18	15	25	10	12
t2=B	30	35	31	25	27
t3=C	25	30	30	25	35
t4=D	50	50	55	40	45