(*) Three conditional events or more:
If we have 3 events A, B and C, then
اذا كان لدينا 3 حوادث A, B و C فان

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B|A) \cdot P(C|(A \cap B))$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C|(A \cap B))$$

$$\therefore P(C|(A \cap B)) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$

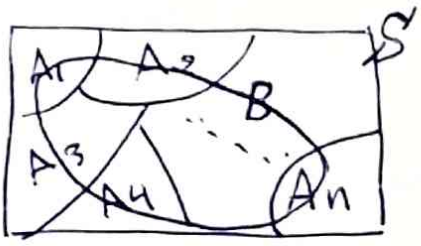
In general if we have K events, then
وللتعميم لاكثر من ثلاث حوادث
فاذا كان لدينا (K) من الاحداث فان

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_K) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \dots P(A_K | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{K-1})$$

(*) Partition and Bayes' theorem : التجزئة ونظرية بيز

Suppose the events $A_1, A_2, \dots, A_n$ form a partition of sample space S, that is the events A_i are m.e. and their union is S. Now let B be any other event, then
لتكن الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ هي حوادث بصيغة تجزئة من فضاء العينة S والتي تحقق او تمثل انها حوادث متنافية m.e. وان اتحادها يمثل او يعطي فضاء العينة S. واذا كانت الحادثة B هي حادثة اخرى فان

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B$$



$\Rightarrow B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$

وتكون $(A_1 \cap B)$ و $(A_2 \cap B)$ و ... و $(A_n \cap B)$ هي ايضاً متنافية (m.e)

مما يؤدي الى ان احتمال حدوث الحادثة B $(P(B))$ يمثل حاصل جمع احتمالات التقاطعين جميع الحوادث A_i مع الحادثة B اي ان

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

وبالرجوع الى صيغة ايجاد التقاطع عند طرح الاحتمال الشرطي حيث ان

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

وان $P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$

وعليه فان

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

ويمكن التعبير عن المعادلة الاخيرة بصيغة المجموع وكالآتي

$$\therefore P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i) \quad \dots (1)$$

on the other hand, for any i, the conditional Probability of A_i given B is denoted by:

وعليه يمكن ايجاد الاحتمال الشرطي لاي حادثة A_i على اعتبار ان الحادثة B معطاة (قد حدثت أولاً)، وهي بصيغة

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

In this equation we use (1) to replace $P(B)$ and use $P(A_i \cap B) = P(B|A_i)\,P(A_i)$ في هذه المعادلة سوف نستخدم المعادلة (1) في التعويض عن $P(B)$ وكذلك نستخدم المعادلة

للحصول على او تطبيق نظرية بيز والتي تتمثل بتطبيق المعادلة الآتية

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} (B|A_i)\,P(A_i)}$$

EX: (1)

The machines A, B and C produce respectively 50%, 30% and 20% of the total number of items of a factory. The percentages of defective output of these machines are 3%, 4% and 5%. If an item is select at random, find the probability that the item is defective.

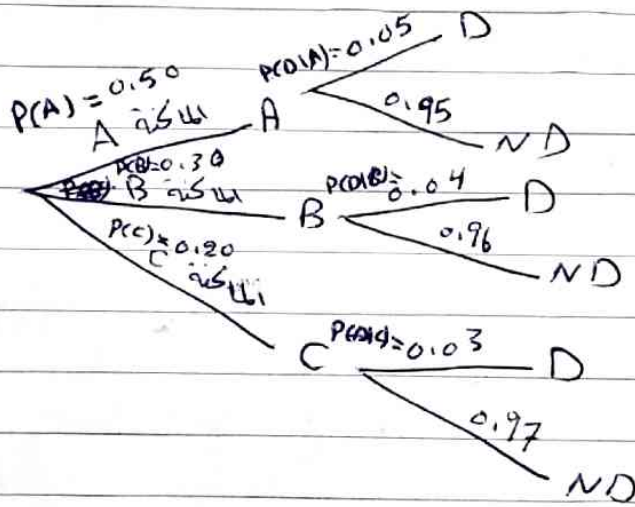
في معمل هناك ثلاثة مكائن هي A, B, C تنتج 50%, 30%, 20% على التوالي (اي $A \Rightarrow 0.50$, $B \Rightarrow 0.30$, $C \Rightarrow 0.20$). وكانت نسب الوحدات المعابة هي 3%, 4%, 5% على التوالي اي ان الماكنة A تنتج ما نسبة 0.03 من الوحدات المعابة، والماكنة B 0.04، والماكنة C 0.05 اذا اخترنا وحدة واحدة عشوائياً، اوجد احتمال ان تكون هذه الوحدة معابة.

Sol.:

يمكن رسم مخطط شجري لهذه المسألة وكالآتي

D = Defective معابة

ND = Non defective غير معابة



ان مجموع فروع شجرة كل ماكنة يساوي الواحد الصحيح اي ان مجموع انتاج المكائن $0.50 + 0.30 + 0.20 = 1$

وكذلك فان مجموع فرعي كل ماكنة (D و ND) يساوي الواحد فالنسبة الماكنة A

فان نسبة المعاب + نسبة غير المعاب = 1

اي $0.05 + ND = 1 \Rightarrow ND = 1 - 0.05 = 0.95$

والماكنة B $\Rightarrow D + ND = 1$

$0.04 + ND = 1 \Rightarrow ND = 1 - 0.04 = 0.96$

والماكنة C $\Rightarrow 0.03 + ND = 1 \Rightarrow ND = 1 - 0.03 = 0.97$

من المعطيات في الصيغة السابقة نلاحظ الاحتمالات الآتية:

① $P(A) = 0.50$ احتمال الماكنة A ، $P(D|A) = 0.05$ احتمال ظهور لوحدة معابة مع العلم انها من الماكنة A ، $P(ND|A) = 0.95$ احتمال ظهور لوحدة غير معابة مع العلم انها من الماكنة A

② $P(B) = 0.30$ احتمال الماكنة B ، $P(D|B) = 0.04$ احتمال ظهور لوحدة معابة مع العلم انها من الماكنة B ، $P(ND|B) = 0.96$ احتمال ظهور لوحدة غير معابة مع العلم انها من الماكنة B

③ $P(C) = 0.20$ احتمال الماكنة C ، $P(D|C) = 0.03$ احتمال ظهور لوحدة معابة مع العلم انها من الماكنة C ، $P(ND|C) = 0.97$ احتمال ظهور لوحدة غير معابة مع العلم انها من الماكنة C

والمطلوب من المثال هو اختيار وحدة عشوائياً من إنتاج الكلي وايجاد احتمال ان تكون معابة ،
نلاحظ ان لوحدات المعابة موجودة في انتاج جميع الماكنات الثلاثة وهذا يعني ان الوحدة المختارة عكن ان تكون من A أو B أو C وعليه يحكم حساب هذا الاحتمال كالآتي

$$P(D) = P(A)\cdot P(D|A) + P(B)\cdot P(D|B) + P(C)\cdot P(D|C)$$
$$= (0.50)(0.05) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.03)$$
$$P(D) = 0.037$$

احتمال ان تكون الوحدة المختارة عشوائياً معابة

مطلوب آخر:

Suppose an item is selected at random and is found to be defective. Find the probability that the item was producted by machine A.

افرض ان الوحدة المختارة عشوائياً كانت معابة . اوجد احتمال ان تكون من انتاج الماكنة A ، وعليه فان الاحتمال المطلوب هو

$P(A|D) = ?$

احتمال لوحدة المعابة من الماكنة A

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)\cdot P(A)}{P(D)} = \frac{P(D|A)\cdot P(A)}{P(D|A)\cdot P(A) + P(D|B)\cdot P(B) + P(D|C)P(C)}$$

ان الاحتمال $P(D)$ وجدناه في المطلوب السابق وعليه يمكن استخراجه مباشرة

$$\therefore P(A|D) = \frac{(0.05)(0.50)}{0.037} = \frac{0.015}{0.037} = \frac{15}{37}$$

EX: (2) كلية معينة

In a certain college 4% of the men and 1% of the women taller than 180 cm. Furthermore 60% of the students are women. Now if a student is selected at random and is taller than 180 cm, what is the probability that student woman.

في كلية معينة 4% (اربعة بالمئة) من الرجال و 1% (واحد بالمئة) من النساء هم ذات طول اكثر من 180cm. علاوة على ذلك فان 60% من الطلبة هم نساء، الآن اذا اخترنا طالب عشوائياً وكان طوله اكثر من 180cm. ماهو احتمال ان يكون الطالب المختار امرأة؟

Sol.

نلاحظ ان الطلبة بصورة عامة ينقسمون الى رجال ونساء وان نسبة النساء هي 60% فان نسبة الرجال تكون

نسبة الرجال + نسبة النساء = 1

$$P(M) + P(W) = 1$$

$$P(M) + 0.60 = 1$$

$$\therefore P(M) = 1 - 0.60 = 0.40$$

وان الرجال ينقسمون حسب طولهم اكثر من 180 فاكثر واقل من 180 وكذلك النساء، وعليه يمكن رسم المخطط الشجري

نفرض ان A = تمثل الرجال والنساء الذين طولهم اكثر من 180

A' تمثل الرجال والنساء الذين طولهم اقل من 180