2- الاستقراء الداخلي التربيعي(Quadratic Interpolation):

يتم في الاستقراء الداخلي التربيعي تقدير قيمة y باستخدام قيمة x من خلال متعدد الحدود التربيعي : Quadratic polynomial

$$y = B_0 + B_1 x + B_2 x^2$$

حيث ان متعدد الحدود أعلاه غير معروف وسيتم بناؤه من خلال البيانات المتوفرة في المسالة الرياضية ,حيث سيتم تقدير قيم B_2, B_1, B_0 من خلال تحديد ثلاث ازواج من البيانات المتوفرة والتي هي $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots, (x_n, y_n)$, حيث ان

n عدد صحيح موجب, وللتذكير ,فان مشكلتنا هي تقدير قيمة y عند قيمة محددة ومعلومة ل x علما ان$x \neq x_i$ لجميع قيم i=0,1,2,….n . اذن سنحتاج لتحديد ثلاثة ازواج من البيانات مثلا$(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_C, y_C)$, بشرط ان تكون اقرب ماتكون الى قيمة x. بعد ذلك يتم تعويض النقاط الثلاثة في متعدد الحدود التربيعي ,وبذلك نحصل على ثلاثة معادلات وكالاتي:

$$y_a = B_0 + B_1 x_a + B_2 x_a^2$$
$$y_b = B_0 + B_1 x_b + B_2 x_b^2$$
$$y_c = B_0 + B_1 x_c + B_2 x_c^2$$

وبما ان $(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_C, y_C)$ معلومة مسبقا في المسالة الرياضية ,اذن نلاحظ من المنظومة أعلاه تتكون من ثلاثة مجاهيل هي B_2, B_1, B_0, وثلاثة معادلات خطية .اذن يمكن تحويل المنظومة أعلاه الى صيغة المصفوفات وكالاتي:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_a & x_a^2 \\ 1 & x_b & x_b^2 \\ 1 & x_c & x_c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix}$$

لاحظ ان المنظومة أعلاه هي منظومة معادلات خطية مكونة من ثلاثة معادلات وثلاثة مجاهيل علما ان المنظومة تعتبر خطية لان المجاهيل B_2, B_1, B_0 غير مرفوعة لاس.

اذا بالإمكان حل المنظومة أعلاه باستخدام احدى الطرق التي تطرقنا لها مسبقا في الفصل الدراسي الأول , مثلا طريقة كاوس –جوردن , طريقة كاوس للحذف , طريقة المعكوس A^{-1},وطريقة التحليل المثلثي , وكذلك الطرق العددية الأخرى مثل طريقتي جاكوبي وطريقة كاوس –سيدل.

ويعد الحل يتم تعويض قيم B_2, B_1, B_0 المقدرة في النمودج التربيعي , ومن ثم يمكن حساب قيمة y بالتعويض بقيمة x في النمودج المقدر.

Example:

From the data of the previous example of determining the speed of the rocket after the passage of x=16 Use interpolation quadratic induction to estimate the value of y at the time x=16.

Time in seconds	0	10	15	20	22.5	30
Speed km/min	0	227.04	362.78	517.35	602.97	901.67

الحل :

واضح ان المتغير x يمثل الزمن, فيما يمثل المتغير y سرعة الصاروخ بمعنى اخر ,فان السرعة y هي دالة غير معلومة بالنسبة للزمن x .

بما ان المطلوب هو تقدير سرعة الصاروخ عند $x = 16$ فانه من البديهي اختيار اقرب قيمتين الى 16, وهما 15 و 20. اما بالنسبة للقيمة الثالثة , فبالامكان اختيار 10 او 22.5 , وبما ان العدد 16 اقرب الى العدد 10 من العدد 22.5 ,لذلك يفضل اختيار القيمة الثالثة لتكون 10 . اذن الأزواج الثلاثة التي تم اختيارها هي :

$$(x_a \ , \ y_a) = (10 \ , \ 227.04)$$
$$(x_b \ , \ y_b) = (15 \ , \ 362.78)$$
$$(x_c \ , \ y_c) = (20 \ , \ 517.35)$$

وبالتعويض:

$$227.04 = B_0 + B_1(10) + B_2(10^2)$$
$$362.78 = B_0 + B_1(15) + B_2(15^2)$$
$$517.35 = B_0 + B_1(20) + B_2(20^2)$$

وباستخدام صيغة المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227.04 \\ 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix}$$

والان بالإمكان استخدام احدى طرق حل منظومات المعادلات الخطية لايجاد قيم المجاهيل B_2, B_1, B_0 وعلى فرض انه واقع اختيارنا على طريقة المعكوس A^{-1} عندئذ نقوم بتكوين المصفوفة الموسعة , ومن ثم نقوم بالتحويلات المطلوبة وكالاتي :

$$[A:I] \overset{transformation}{\Rightarrow} \left[I : A^{-1}\right]$$

ومن ثم حساب المجاهيل من خلال :

$$x = A^{-1}b$$

حيث ان :

$$\left(x_a \;\; , \; y_a\right) = \left(10 \;\; , \; 227.04\right)$$
$$\left(x_b \;\; , \; y_b\right) = \left(15 \;\; , \; 362.78\right)$$
$$\left(x_c \;\; , \; y_c\right) = \left(20 \;\; , \; 517.35\right)$$

$$x = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 227.04 \\ 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \end{bmatrix}^{-1}$$

نذكر انه بالإمكان دائما استخدام برنامج ماتلاب لايجاد معكوس المصفوفة A وكذلك حساب نتيجة الضرب الأخير $\left(A^{-1}b\right)$بدلا من تطبيق التحويلات اليدوية.

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 225 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 400 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{transformation}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & : & -0.7 & 1.2 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & : & 0.02 & -0.04 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -0.7 & 1.2 & -0.5 \\ 0.02 & -0.04 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 227.04 \\ 362.78 \\ 517.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.05 \\ 17.733 \\ 0.3766 \end{bmatrix}$$

عليه يكون نمودج الاستقراء الداخلي التربيعي كالاتي:

$$y = B_0 + B_1 x + B_2 x^2$$

$$y = 12.05 + 17.733x + 0.3766x^2$$

علما ان صلاحية النمودج الأخير مقتصرة على جميع قيم x التي تحقق $10 < x < 20$ اذن والان نعوض $x = 16$:

$$y = 12.05 + 17.733(16) + 0.3766(16^2)$$
$$y = 392.1876$$

اذن تقدر سرعة الصاروخ عند الثانية 16ب 392.1876 كم\ د ,وذلك حسب طريقة الاستقراء الداخلي التربيعي.

الاستقراء الداخلي النوني(n^{th} -Order Interpolation):

بالإمكان تعميم فكرة الاستقراء الداخلي لدرجات اعلى (تكعبية –رباعية,.....الخ) واستخدام مايعرف يفكرة متعددات الحدود او كثيرات الحدود النونية (n^{th} - Order polynomials) وبما انه لدينا $n+1$ من ازواج البيانات فاذن يمكننا بناء نموذج من الدرجة النونية او من الدرجة n على الأكثر وكالاتي:

على فرض انه يتوفر لدينا البيانات $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$ حيث ان nعدد صحيح موجب .واننا نرغب بتقدير قيمة y عند قيمة محددة ومعلومة ل x, علما ان $x \neq x_i$ لجميع قيم i=0,1,2,….n . عندئذ فاننا سنحتاج الى جميع القيم المتوفرة في المسالة الرياضية لبناء متعدد الحدود النوني الاتي:

$$y = B_0 + B_1 x + B_1 x^2 + \ldots.. + B_n x^n$$

وبالنسق نفسه الذي تطرقنا اليه في حالة الاستقراء الداخلي الخطي والتربيعي نعوض جميع القيم المعطاه في المسالة الرياضية في النموذج أعلاه . وذلك يؤدي الى الحصول على $n+1$ من المعادلات الخطية :

$$
\begin{aligned}
y_0 &= B_0 + B_1 x_0 + B_2 x_0^{\,2} + \ldots\ldots + B_n x_0^{\,n} \\
y_1 &= B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_1^{\,2} + \ldots\ldots + B_n x_1 \\
&\vdots \\
y_n &= B_0 + B_1 x_n + B_2 x_n^{\,2} + \ldots\ldots + B_n x_n^{\,n}
\end{aligned}
$$

والمنظومة أعلاه تحتوي $n+1$ من المعادلات الخطية وكذلك $n+1$ من المجاهيل .اذن يمكن حلها باستخدام الطرق التي مر ذكرها سابقا لحل منظومات المعادلات الخطية حيث ان :

$$Ax = b$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_0 & x_0^{\,2} & \ldots\ldots & x_0^{\,n} \\
1 & x_1 & x_1^{\,2} & \ldots\ldots & x_1^{\,n} \\
1 & x_2 & x_2^{\,2} & \ldots\ldots & x^n{}_2 \\
. & . & . & \ldots\ldots & . \\
. & . & . & \ldots\ldots & . \\
1 & x_n & x^2{}_n & \ldots\ldots & x^n{}_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ . \\ . \\ B_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}
$$

ويعد حل المنظومة وتقدير قيم $B_0, B_1, B_2 \ldots\ldots B_n$, يمكن حينئذ تطبيق نمودج الاستقراء الداخلي النوني المقدر لحساب قيمة y بتعويض قيمة x في النمودج المقدر . علما ان النموذج الذي تم بناؤه يكون صالحا للتطبيق على جميع قيم x التي تحقق $x_0 < x < x_n$.

Homework:

1. For rocket speed example data, estimate the speed of the rocket at 16 seconds using quadratic interpolation by using
$(x_a, y_a) = (15, 362.78), (x_b, y_b) = (20, 517.35), (x_c, y_c) = (22.5, 602.97)$

2. For the example data of the rocket speed, suppose we want to build a nth degree model to estimate the speed of the rocket using the available data, indicate the degree of the model according to the available data, write all the equations that will

be used in the model and then write the system of linear equations using the matrix formula.