Interpolation Formulas Using Finite Differences

The interpolation formulas using differences are:

(1) Newton's forward interpolation formula.

(2) Newton's backward interpolation formula.

Let x_i and $y_i = f(x_i) = f_i$, where

$x_i = x_0 + ih = x_{i-1} + h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

to find the estimate value of $f(x)$ at x_m,

where $x_m = x_0 + mh$, $-1 < m < 1$

and $f_m = f(x_m) = f(x_0 + mh)$, then

$$f_m = f(x_m) = f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \quad (3)$$

Equation (3) is called Newton forward differences formula.

تستخدم هذه الصيغة (3) عندما تكون القيمة المطلوب تخمين الدالة عندها موجودة في بداية جدول الفروقات.

and the formula of Newton backward difference is defined as :-

$$f_m = f(x_m) = f_0 + m\nabla f_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 f_0 + \cdots + \frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{n!}\nabla^n f_0 \quad \text{---(4)}$$

تستخدم المعادلة (4) عندما تكون القيمة المطلوب تخمين الدالة عندها موجودة قرب نهاية جدول الفروقات .

EX :- Find $f(4.5)$ and $f(9)$ from the following table -

x	4	6	8	10
$f(x)$	1	3	8	20

Sol :-

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
4	[1]	[2]	[3]	[4]
6	3	5		
8	8	(12)	(7)	
10	(20)			

بما أن $x_m = 4.5$ تقع في بداية الجدول عليه نستخدم صيغة نيوتن للفروقات الامامية (Newton forward differences formula)

وتسمى $x_0 = 4$

$$\therefore x_m = x_0 + mh$$

$$\Rightarrow m = \frac{x_m - x_0}{h} = \frac{4.5 - 4}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(4.5) \simeq f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(2) + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!}(3) + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!}(4)$$

$$= \underline{1.4375}$$

وبما أن $x_m = 9$ تقع في نهاية جدول الفروقات عليه نستخدم صيغة نيوتن للفروقات التراجعية (Newton backward differences formula)

وتسمى $x_0 = 10$

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} = \frac{9-10}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(9) \simeq f_0 + m\nabla f_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 f_0$$

$$= 20 + (-\frac{1}{2})(12) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+1)}{2!}(7) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)}{3!}(4)$$

$$= \underline{12.875}$$

H.W. :-

Let $f(x)=\sin x$, find the values of the table of $0.6 \leq x \leq 1$ where $h=0.1$, and then estimate $f(0.63)$.

Sol :- $x_0 = 0.6$, $x_1 = 0.7$, $x_2 = 0.8$

$x_3 = 0.9$, $x_4 = 1$.

$f(x_0) = f(0.6) = \sin(0.6) =$

$f(x_1) = f(0.7) = \sin(0.7) =$

$f(x_2) = f(0.8) = \sin(0.8) =$

$f(x_3) = f(0.9) = \sin(0.9) =$

$f(x_4) = f(1) = \sin(1) =$