Lecture-3-

(Chapter Four)

Random variables المتغيرات العشوائية

4.1 : Definitions : تعاريف

A random variable X is a real valued function whose numerical value is determined by the outcome of a random experiment.

المتغير العشوائي X هو دالة ذات قيمة حقيقية يتم تحديد قيمتها العددية من خلال نتيجة تجربة عشوائية.

* يرمز للمتغير العشوائي بالرموز الآتية الكبيرة X_1 و... X, Y, Z ، X_2 و... X_n في حين يرمز للقيم التي تأخذها المتغيرات العشوائية بالحروف الآتية الصغيرة مثل x_n و... x_1, x_2 و z, y, x.

4.2 : Type of random variable (r.v.)

نوع المتغير العشوائي :

① يقال للمتغير العشوائي بأنه متغير عشوائي متقطع (منفصل) Discrete (r.v.) اذا كان فضاء مداه قيماً منقطعة يعبر عنها بشكل $x_1, x_2, \dots x_n$ مثل $X_1 = 0, 1, 2$ وان فضاء العينة للمتغير المتقطع لا يشترط ان يكون منقطعاً أيضاً، بل يمكن ان يكون منقطعاً أو مستمراً او مزيج من كلاهما.

② يقال للمتغير العشوائي بانه متغير عشوائي مستمر (متصل) continuous (r.v.) اذا كان فضاء مداه يأخذ قيماً مستمرة ويعبر عنها بشكل فترات مثل $X \leq 5$ ، $X > 0$ ، $0 < X < \infty$

random variable (r.v.)

- متغير عشوائي متقطع Discrete r.v. : $X = 0, 1, 2, \dots$
- متغير عشوائي مستمر continuous r.v. : $a < X < b$

Remarks: ملاحظات

اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على نفس فضاء العينة S'

① If X and Y are two random variables defined on the same sample space S' , then

فان هذه العمليات ← $X+Y$, aX , X/Y , $aX+bY$, XY (العلاقات) بينهم are also r.v. on S' where $a,b \in R$ هي متغيرات عشوائية في S' عندما الثابتين a و b ينتميان لمجموعة الاعداد الحقيقية R .

② Also $\max(X,Y)$ and $\min(X,Y)$ are r.v.

كذلك فان الاكبر من بين (X,Y) والاقل من بين (X,Y) هو ايضاً متغير عشوائي

EX: (1) امثلة عن كيفية تحديد قيم المتغير العشوائي

Suppose that an experiment consist of tossing 2 fair (اعتيادية) coins, If we let X denote the number of heads appearing , then

لنفرض ان تجربة رمي قطعتي نقود اعتياديه ، اذا كانت X تمثل عدد الصور التي سوف تظهر بعد الرمي فان هذا المتغير X سوف يأخذ القيم الآتية :

* عند رمي قطعتي النقود فالنتائج الممكنة اما ان تظهر الصورة في القطعة الاولى والثانية كتابة أو تظهر الكتابة على القطعة الاولى والصورة على القطعة الثانية أو تظهر الصورة على القطعتين أو تظهر الكتابة على القطعتين ، وعليه فان قيم المتغير العشوائي X والذي يمثل ظهور الصورة تكون كالآتي

$X = 0$, 1 , 2

- 0 : عدم ظهور الصورة (اي ظهور كتابتين)
- 1 : ظهور الصورة اما على القطعة الاولى والثانية كتابة أو ظهورها على القطعة الثانية والاولى كتابة
- 2 : ظهور الصورة على القطعتين

ويكون فضاء التجربة كما هو

$S' = \{HH , HT , TH , TT\}$

$X:\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0$

$X(HH) = 2$ ، $X(H\bar{T}) = X(\bar{T}H) = 1$ ، $X(\bar{T}\bar{T}) = 0$

هذه الاحتمالات $P(X=0) = \frac{1}{4}$ ، $P(X=1) = \frac{2}{4}$ ، $P(X=2) = \frac{1}{4}$
لكل قيم المتغير العشوائي X والذي يأخذ القيم كما ذكرنا سابقاً $X=0,1,2$

(*) يجب ان يكون مجموع جميع احتمالات قيم المتغير العشوائي تساوي الواحد اي ان

$$\sum_{i=0}^{2} P(X=i) = 1$$

$$\sum_{i=0}^{2} P(X=i) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

EX: (2)

Suppose an experiment consist of tossing a fair (unbiased) dice until number (6) appears.

في تجربة لرمي زهر نرد اعتيادي (غير متحيز) عدة مرات الى ان يظهر الرقم (6) (اي الاستمرار بالرمي الى عدد غير محدد من ظهور العدد 6)

If we let Y denoted the number of tosses required, then Y is a r.v. takes on the values 1, 2, 3, ...

اذا كان Y يمثل عدد الرميات المطلوبة لاجراء التجربة فان Y هو متغير عشوائي (r.v.) يأخذ القيم $1, 2, 3, \ldots$

تكون قيم Y التي تمثل عدد الرميات $Y = 1, 2, 3, \ldots$
كون الحصول على العدد (6) غير محددة لاننا لا نعلم متى سوف يظهر الرقم (6) ممكن ان يظهر في الرمية الاولى او الثانية او ...

EX: (3)

Let an experiment consist of tossing a pair of unbiased dice. Let X be a r.v. indicating the sum of the two faces. Then

في تجربة لرمي زارين غير متحيزين . ليكن X متغير عشوائي يبين مجموع وجهي الزارين وعليه فان X سوف يأخذ القيم الكلية

$X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$

ان فضاء التجربة هو

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1)_2 & (1,2)_3 & (1,3)_4 & (1,4)_5 & (1,5)_6 & (1,6)_7 \\ (2,1)_3 & (2,2)_4 & (2,3)_5 & (2,4)_6 & (2,5)_7 & (2,6)_8 \\ (3,1)_4 & (3,2)_5 & (3,3)_6 & (3,4)_7 & (3,5)_8 & (3,6)_9 \\ (4,1)_5 & (4,2)_6 & (4,3)_7 & (4,4)_8 & (4,5)_9 & (4,6)_{10} \\ (5,1)_6 & (5,2)_7 & (5,3)_8 & (5,4)_9 & (5,5)_{10} & (5,6)_{11} \\ (6,1)_7 & (6,2)_8 & (6,3)_9 & (6,4)_{10} & (6,5)_{11} & (6,6)_{12} \end{Bmatrix}$$

فلاحظ ان مجاميع النتائج الممكنة أصغر كل نتيجة في S تبدأ بـ 2 وتنتهي بـ (12) وان عدد هذه النتائج سوف يكون

$2 \to 1$	$7 \to 6$
$3 \to 2$	$8 \to 5$
$4 \to 3$	$9 \to 4$
$5 \to 4$	$10 \to 3$
$6 \to 5$	$11 \to 2$
	$12 \to 1$

وعليه فان احتمالات هذه النتائج تكون كالآتي

$$P(X=2) = \frac{1}{36}, \quad P(X=3) = \frac{2}{36}, \quad P(X=4) = \frac{3}{36}, \quad P(X=5) = \frac{4}{36}$$

$$P(X=6) = \frac{5}{36}, \quad P(X=7) = \frac{6}{36}, \quad P(X=8) = \frac{5}{36}, \quad P(X=9) = \frac{4}{36}$$

$$P(X=10) = \frac{3}{36}, \quad P(X=11) = \frac{2}{36}, \quad P(X=12) = \frac{1}{36}$$

$$\sum_{i=2}^{12} P(X=i) = 1$$

ومجموع هذه الاحتمالات = 1