(٤) When μ know:

$$L(\Sigma) = (2\pi)^{\frac{-np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)'\Sigma^{-1}(x_i-\mu)}$$

ناخذ ln للطرفين

$$\ln L(\Sigma) = -\frac{np}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum(x_i-\mu)'\Sigma^{-1}(x_i-\mu) \quad \text{---(*)}$$

العدد الموجود في المجموع $\sum_{i=1}^{n}$ في المعادلة (*) عبارة عن شكل تربيعي والشكل التربيعي ثابت ذات بعد (1x1) وباستخدام خاصية اثر المصفوفة فان الاثر للثابت هو نفسه. وحسب خاصية الاثر كاحد ضرب مجموعة من المصفوفات المتتابعة دورية. وحسب خاصية الاثر كاحد ضرب المصفوفات عوائج مثلثة وكما يلي:-

حيث اثر كاحد ضرب المصفوفات عوائج مثلثة وكما يلي:-

$$tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$$

وعليه يمكن كتابة المعادلة (*) حسب الخاصية اعلاه بالشكل الاتي:-

$$\ln L(\Sigma) = -\frac{np}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} tr(x_i-\mu)'\Sigma^{-1}(x_i-\mu)$$

$$\Rightarrow \ln L(\Sigma) = -\frac{np}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} tr\left[\Sigma^{-1}(x_i-\mu)(x_i-\mu)'\right]$$

وحسب خاصية الاثر كاحد جمع مصفوفتين الذي يساوي حاصل جمع الاثر لكل مصفوفة

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

وعليه يكون:

$$\ln L(\Sigma) = -\frac{np}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2} tr\left[\Sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(x_i-\mu)'\right]$$

نشتق المعادلة اعلاه بالنسبة لـ Σ ، نساوي بالمصفوفة الصفرية $[0]_{p\times p}$

Scanned with CamScanner

Remark

if A is a $(p \times p)$ non-singular matrix then :-

$$\frac{\partial \ln |A|}{\partial A} = A^{-1}$$

and if $\underline{x}, \underline{b}$ be vector of size $(p \times 1)$ then :-

$$\frac{\partial}{\partial A} \left[tr \left(A^{-1} (\underline{x} - \underline{b})(\underline{x} - \underline{b})' \right) \right] = -A^{-1} (\underline{x} - \underline{b})(\underline{x} - \underline{b})' A^{-1}$$

بالاعتماد على الملاحظة السابقة سوف نجد مشتقة $\ln L(\Sigma)$ بالنسبة لـ Σ كالآتي:

$$\frac{\partial \ln L(\Sigma)}{\partial \Sigma} = \frac{-n}{2} \Sigma^{-1} + \frac{1}{2} \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \underline{\mu})(\underline{x}_i - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} \quad \text{---} (**)$$

Let $A = \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \underline{\mu})(\underline{x}_i - \underline{\mu})'$

إذا أن المصفوفة (A) مصفوفة متماثلة وأكيدة الإيجابية

بمساواة المعادلة $(**)$ بالمصفوفة الصفرية $(0)_{p \times p}$

$$0_{p \times p} = \frac{-n}{2} \Sigma^{-1} + \frac{1}{2} \Sigma^{-1} A \Sigma^{-1}$$

$$\Rightarrow n \Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} A \Sigma^{-1}$$

$$\Rightarrow n I_p = A \Sigma^{-1}$$

وبضرب المعادلة أعلاه بـ Σ من اليمين

$$n \Sigma = A$$

$$\therefore \Sigma = \frac{A}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)(x_i - \mu)'}{n}$$

Scanned with CamScanner

حيث ان العنصر $\hat{\sigma}_{ij}$ عناصر القطر الرئيسي هي البيانات لكل متغير اما عناصر خارج القطر الرئيسي هو عبارة عن البيانات المشتركة:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{13} & \cdots & \hat{\sigma}_{1p} \\ \vdots & \hat{\sigma}_2^2 & \hat{\sigma}_{23} & \cdots & \hat{\sigma}_{2p} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \hat{\sigma}_{p1} & \cdots & \cdots & & \hat{\sigma}_p^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \underline{\mu}_1)^2$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{2i} - \underline{\mu}_2)^2$$

$$\vdots$$

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{pi} - \underline{\mu}_p)^2$$

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \underline{\mu}_1)(x_{2i} - \underline{\mu}_2)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\sigma}_{1p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \underline{\mu}_1)(x_{pi} - \underline{\mu}_p)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \mu_i)^2 & \text{وهذه يكون } i=j \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - \mu_i)(x_{jk} - \mu_j) & i \neq j \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Definition تعريف التباين للمتجه العشوائي $\underline{x}$

if $\underline{x}$ is a r.v. whose $E\underline{x} = \underline{\mu}$ then :-

$$\begin{aligned} Var(\underline{x}) &= E(\underline{x} - E\underline{x})(\underline{x} - E(\underline{x}))' \\ &= E(\underline{x} - \underline{\mu})(\underline{x} - \underline{\mu})' \\ &= E(\underline{x}\underline{x}' - \underline{\mu}\underline{x}' - \underline{x}\underline{\mu}' + \underline{\mu}\underline{\mu}') \\ &= E\underline{x}\underline{x}' - \mu E\underline{x}' - E\underline{x}\underline{\mu}' + \underline{\mu}\underline{\mu}' \end{aligned}$$

but $E\underline{x}' = (E\underline{x})' = \underline{\mu}'$

$$\therefore Var(\underline{x}) = E\underline{x}\underline{x}' - \underline{\mu}\underline{\mu}' - E\underline{x}\underline{\mu}' + \underline{\mu}\underline{\mu}'$$

$$= E\underline{x}\underline{x}' - \underline{\mu}\underline{\mu}' - \underline{\mu}\underline{\mu}' + \underline{\mu}\underline{\mu}'$$

$$\therefore Var(\underline{x}) = E\underline{x}\underline{x}' - \underline{\mu}\underline{\mu}'$$

$E\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} E A$ اثبت أن $E\hat{\Sigma}$

$$= \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)(x_i - \mu)'$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(\underline{x}_i - \underline{\mu})(\underline{x}_i - \underline{\mu})'$$

but $\underline{x}_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$

$$\therefore E\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Sigma = \frac{n}{n} \Sigma =$$

$$\therefore E\hat{\Sigma} = \Sigma$$

$\therefore \hat{\Sigma}$ when (μ known) is an unbiased estimation for Σ

Scanned with CamScanner

Example:

A random sample was drawn of size (5) from Population of 3-by-variate, normal distribution and the vectors of observation as follows :-

$\underline{X}_1' : 3 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 1$

$\underline{X}_2' : 2 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1$

Find:

(1) Maximum Likelihood estimator for ($\underline{\mu}$) when Σ know

(2) " " " for Σ when ($\underline{\mu}$) know

Scanned with CamScanner