Lecture -4-

4.3: Probability Mass (density) Function for discrete random variable:

دالة كتلة (كثافة) احتمال المتغير العشوائي المتقطع.

اذا كان X متغير عشوائي متقطع، وعلى فرض انه يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots$ فان دالة $f(x)$ تعرف كالآتي

$$f(x) = \begin{cases} f(X=x_i) , & X=x_i \quad , i=1,2,\dots \\ 0 & X \neq x_i \quad (\text{or } O.W. \ (\text{other wise}) \end{cases}$$

4.4: Properties of probability mass (density) function

خصائص دالة الكتلة (الكثافة) الاحتمالية

1) $f(x_i) \geq 0 \quad , i=1,2,3,\dots$ or $0 \leq f(x_i) \leq 1$

2) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$ عند تحقق الخاصيتين لاي دالة $f(x)$ فانه هذه الدالة هي Probability density (P.d.f) function

اي ان $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية

EX: (1)

Three coins are thrown once. Let X be the number of Tails obtained, Find the Probability density function of X.

ثلاث قطع نقود رميت مرة واحدة، واذا كان X يمثل عدد مرات ظهور الكتابة، اوجد دالة كثافة احتمال X.

Sol.:

ان فضاء التجربة S هو

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

X: يمثل عدد مرات ظهور الكتابة

$X=0$ تمثل ان في HHH لم تظهر الكتابة اذن عدد مرات ظهور الكتابة $= 0$

$X=1$ في حين ان في (THH, HHT, HTH) ظهرت الكتابة مرة واحدة اذن

وفي المتتابعة (TTH, THT, HTT) ظهرت الكتابة مرتين اذن $X=2$ $\quad X=2 \quad X=2 \quad X=2$

وفي المتتابعة (TTT) ظهرت الكتابة ثلاث مرات اذن $X=3$ $\quad X=3$

وعليه فان مدى المتغير X لهذه التجربة هو

$X = 0, 1, 2, 3$ ويمثل عدد مرات ظهور الكتابة

ولايجاد دالة كثافة احتمال X سوف نوجد احتمال يحول على كل قيمة من قيم X وكالاتي

$$f(0) = P(X=0) = \frac{n(0)}{n(S')} = \frac{\text{عدد المتتابعات التي تمثل } X=0}{\text{عدد المتتابعات الكلية}} = \frac{P(HHH)}{n(S')}$$

$$f(0) = \frac{1}{8}$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{n(1)}{n(S')} = \frac{\text{عدد المتتابعات التي تمثل } X=1}{\text{عدد المتتابعات الكلية}} = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{n(2)}{n(S')} = \frac{\text{عدد المتتابعات التي تمثل } X=2}{\text{عدد المتتابعات الكلية}} = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = P(X=3) = \frac{n(3)}{n(S')} = \frac{\text{عدد المتتابعات التي تمثل } X=3}{\text{عدد المتتابعات الكلية}} = \frac{1}{8}$$

والتحقق من ان $f(x)$ هي دالة كثافة احتمال اي P.d.f. يجب التحقق من الشرطين

$$f(x) \geq 0 \quad , \quad \sum_i P(x_i) = 1$$

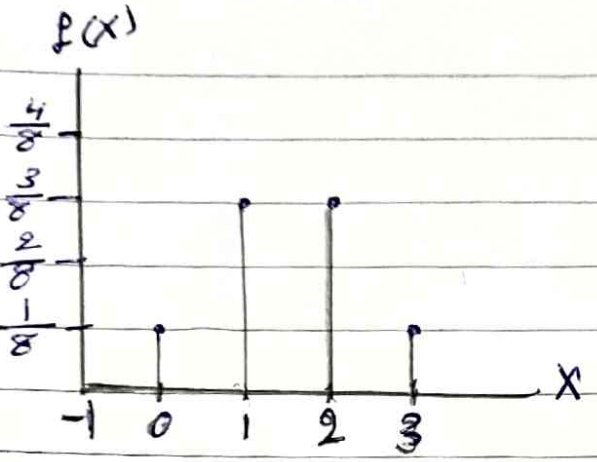
① نلاحظ ان $f(0), f(1), f(2), f(3) > 0$

② $$\sum_{x=0}^{3} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

∴ بتحقق الشرطان اعلاه يمكن القول بان $f(x)$ هي P.d.f.

④ يمكن رسم دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي المتقطع كالاتي بالاعتماد على المثال أعلاه

نضع قيم X على المحور الافقي X وقيم $f(x)$ على المحور العمودي Y.



رسم دالة كثافة الاحتمال

4.5: Distribution Function: دالة التوزيع
or: Cumulative distribution function دالة التوزيع التراكمي أو تسمى
C.d.f.

The cumulative distribution function of a discrete r.v. is denoted by $F(X)$ and is defined by دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع يرمز لها بـ $F(X)$ وتعرف بالآتي

$$F(X) = P(X \leq x) \quad \text{for any real number } x.$$

وهي احتمال ان المتغير العشوائي X يكون اقل او يساوي قيمة معينة (x) لأي عدد حقيقي (x).

⊛ من أهمية هذه الدالة بالتراكمية هذا يعني أنها سوف تجمع الاحتمالات ابتداءً من أقل قيمة (أكبر أو تساوي x) الموجودة في المتغير العشوائي المتقطع والتي هي $F(x) = P(X \leq x)$

$$\Rightarrow F(X) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

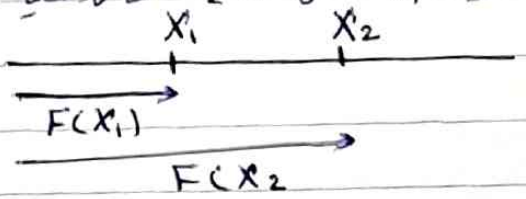
4.6: Properties of the cummulative distribution function: خصائص دالة التوزيع التراكمية.

① $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ قيمة الدالة التراكمية عندما x تقترب من ∞ أي عندما x تقترب من القيمة العليا للمتغير العشوائي أو أكبر منه تساوي الواحد.

② $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ قيمة الدالة التراكمية عندما x تقترب من $-\infty$ أي عندما x تقترب من القيمة الأقل من القيمة الدنيا للمتغير العشوائي X تساوي الصفر.

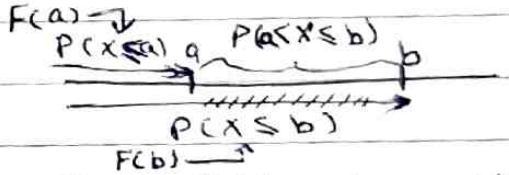
③ $F(X_1) \leq F(X_2)$ if $X_1 < X_2$

عندما تكون X_1 أقل من X_2 فإن قيمة الدالة التراكمية لـ X_1 أقل أو تساوي قيمة الدالة التراكمية لـ X_2.



④ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

عندما تكون $a < b$ فإن احتمال أن يقع X بين a أي تكون أكبر من a و X أقل أو تساوي b يمكن إيجاده عن طريق الدالة التراكمية للعددين a و b وهذا الاحتمال سوف يمثل حاصل طرح F(a) من F(b).



نلاحظ أن $F(a) = P(X \leq a)$ وأن $F(b) = P(X \leq b)$

وعليه احتمال أن X أكبر من a وأقل وتساوي b تمثل حاصل الطرح.

⑤ From ① and ② $\xrightarrow{\text{then}}$ $0 \leq F(X) \leq 1$

من كلا المتباينتين ① و ② نلاحظ أن أكبر قيمة لـ F(X) هي الواحد وأقل قيمة هي الصفر أي يمكننا أن $0 \leq F(X) \leq 1$ (أي لا يجوز أن تكون دالة التوزيع التراكمية سالبة ولا يجوز أن تكون أكبر من الواحد).

⑥ $F(X) = 1 - P(X > X)$

يمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمية F(X) من استخدام متمم تعريفها أي من احتمال أن المتغير العشوائي X يكون أكبر من قيمة معينة (x) وذلك لأن

$$P(X \leq X) + P(X > X) = 1$$

$$F(X) + P(X > X) = 1$$

$$\therefore F(X) = 1 - P(X > X)$$