احصاء حيوي

الكورس الاول

(موضوع المحاضرة)

اختبارات تتعلق بالمتوسطات

Test Concerning Means

Dr.Safwan Nathem Rashed

- **مقدمة:**

سوف نتناول في هذا الفصل اختبارات تتعلق بالمتوسط او الوسط الحسابي سواء في إطار مجتمع واحد او عند دارسة الفروق بين الاوساط الحسابية لأكثر من مجتمع واحد بعد تقدير المعلمات من خلال سحب عينات منها، وذلك في حالة وجود عينتين مستقلتين او عينتين غير مستقلتين.

١. اختبارات تتعلق بمتوسط واحد.
٢. اختبارات تتعلق بين الفروق بين متوسطين.
٣. اختبارات تتعلق بأكثر من متوسط.

١–اختبارات تتعلق بمتوسط واحد
Test Concerning One Mean

لتكن $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ تمثل قياسات مفردات عينة عشوائية تم اختيارها من مجتمع ذي توزيع طبيعي بوسط قدره (μ_0) وتباين (σ^2) للمجتمع، وليكن $(\bar{X}\ ,\ S^2)$ يمثلان الوسط الحسابي والانحراف المعياري على التوالي (عينة) لقياسات هذه العينة.

ليكون اختبار هنا حسب فرضية العدم هي:

$$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0}$$

حيث ان:

μ : الوسط الحسابي للمجتمع.

μ_0 : قيمة معينة معلومة.

σ^2 : تباين المجتمع وهو معلوم.

ملاحظة مهمة جداً:

اذا كان المجتمع المدروس ذو تباين معلوم اي σ^2 في تباين العينة يأخذ من المجتمع ومهما كانت حجم العينة صغير او كبير ويكون ذات مختبر احصائي واحد (Z)،

اما اذا كان غير معلوماً فيتم الاعتماد على تباين العينة S^2 او الانحراف المعياري لها، ويتم تحديد المختبر الاحصائي حسب حجم العينة.

الان يتم مقارنة متوسط العينة بمتوسط المجتمع لنرى هل ان العينة تنتمي لهذا المجتمع او لا ؟ فاذا كانت نتيجة الاختبار بالإيجاب ففي هذه الحالة يكون متوسط العينة المحسوب لا يختلف اختلافاً جوهرياً عن متوسط المجتمع.

ان الاحصائية (Statistic) المناسبة التي سيعتمد عليها اتخاذ القرارات هو المتغير العشوائي ($\bar{X}$) كما بينا سابقاً هو قريب من التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $(\mu_{\bar{X}} = \mu)$ وتباين قدره $(\sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2)$.

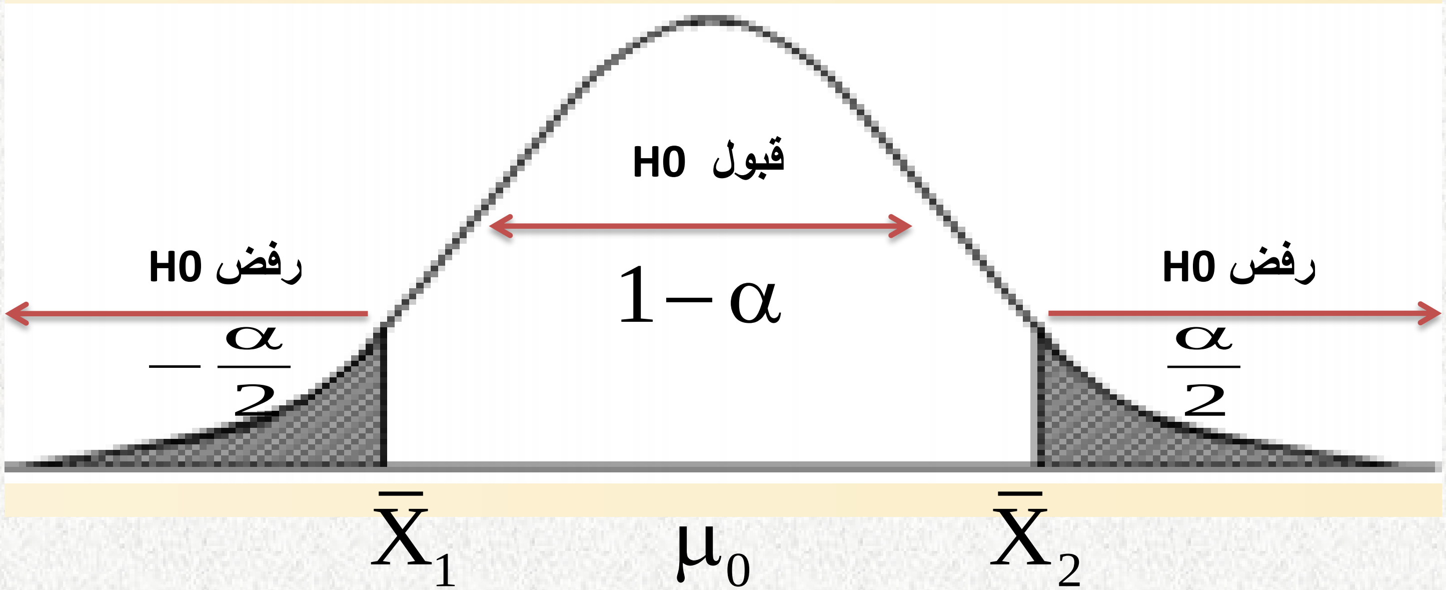
حيث ان (σ^2, μ) هو متوسط وتباين المجتمع الذي سحبت منه العينة ذات حجم (n). فاذا استخدمنا مستوى معنوية = α فأننا نستطيع الان تحديد منطقة الرفض والقبول اعتماداً على نوع الفرضية البديلة:

أ) فاذا كانت الفرضية البديلة هي:

$$\boxed{H_1 : \mu \neq \mu_0}$$

اي ان الوسط الحسابي للمجتمع لا يساوي القيمة المعينة (μ_0) فانه في هذه الحالة يكون لدينا منطقة الرفض عند جهتي المنحنى وهما:

$$\bar{X} \le \bar{X}_1 \quad , \quad \bar{X} \ge \bar{X}_2$$



منطقة الرفض لتوزيع $\bar{X}$ عندما تكون الفرضية البديلة $H_1 : \mu \ne \mu_0$

حيث ان:

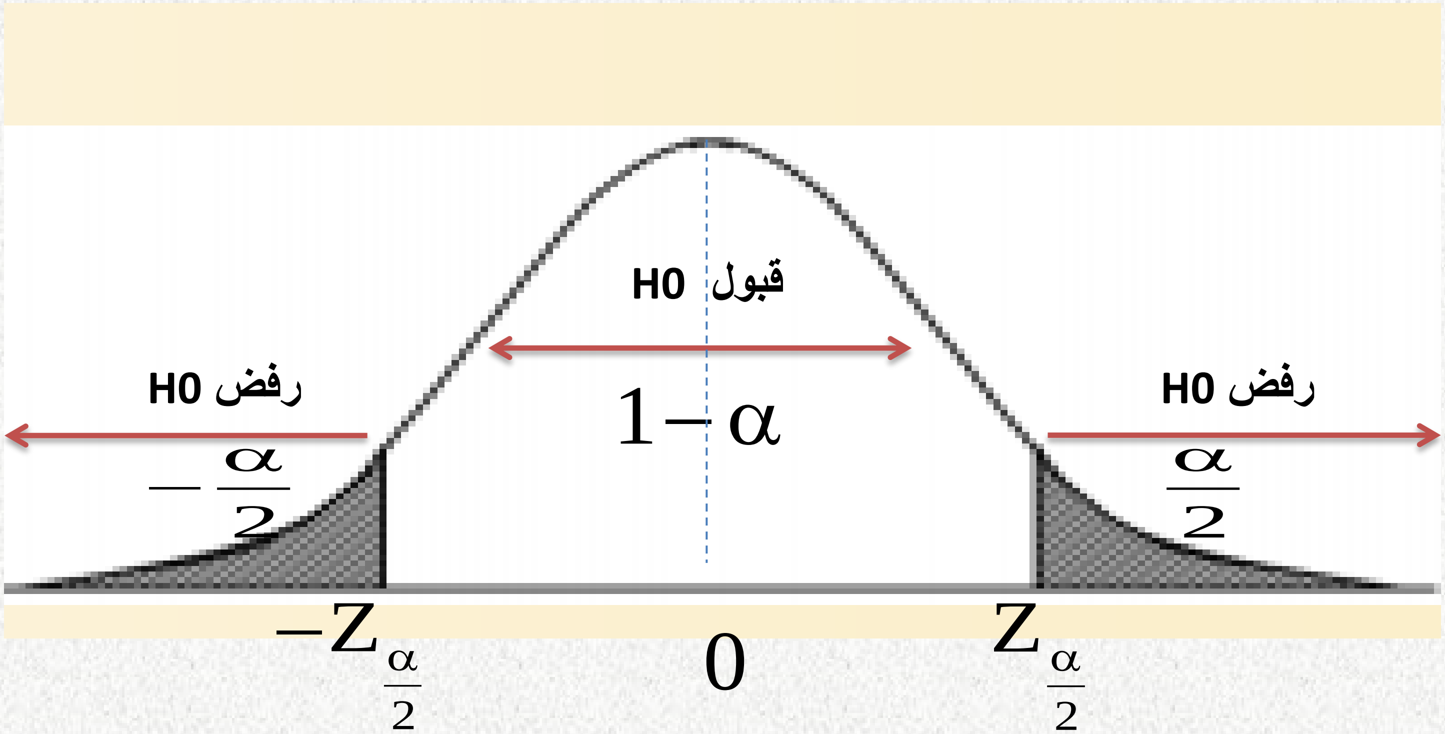
$$\bar{X}_1 = \mu_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X}_2 = \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{X}}$$

ان منطقة الرفض يمكن وضعها في صيغة **Z** باستخدام التحويل التالي:

$$*Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

فالقيم الحرجة للمتغير العشوائي **Z** التي تقابل $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ هي على التوالي:

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \quad ; \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\bar{X}_2 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$



اما منطقة القبول فستكون $\bar{X}_1 \le \bar{X} \le \bar{X}_2$ باستخدام صيغة **Z**

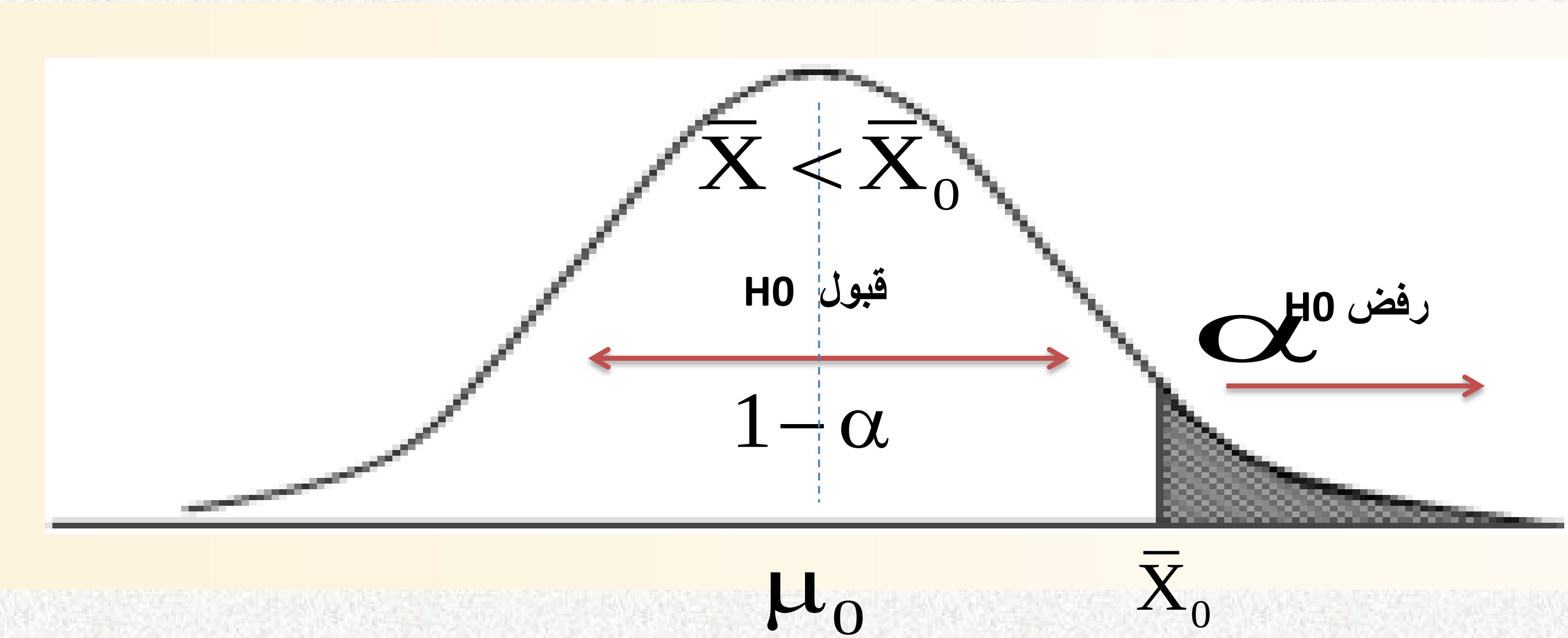
فان منطقة القبول هي:

$$\boxed{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}}}$$

ب) فاذا كانت الفرضية البديلة من جانب واحد اي:

$$\boxed{H_1 : \mu > \mu_0}$$

فان منطقة الرفض ستقع على يمين منحنى توزيع $\bar{X}$



Dr.Safwan Nathem Rashed

ويسمى هذا النوع من الاختبار باختبار ذو طرف واحد (طرف اليمين) وفي هذه الحالة تكون منطقة الرفض (H0) عندما ($\bar{X} \geq \bar{X}_0$) وتكون القبول (H0) عندما ($\bar{X} < \bar{X}_0$)

حيث ان:

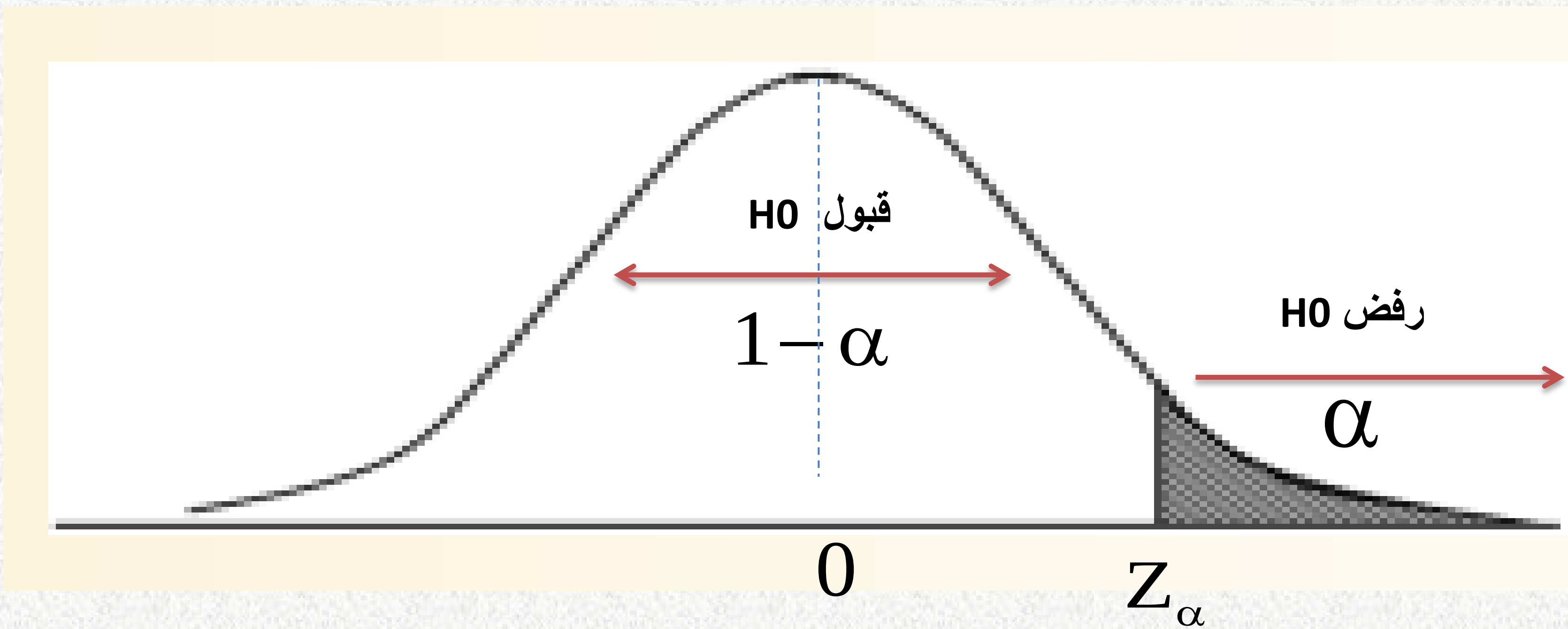
$$\boxed{\bar{X}_0 = \mu_0 + Z_\alpha \times \sigma_{\bar{X}}}$$

وباستخدام صيغة Z فان القيمة الحرجة لـ Z (منطقة الرفض) التي تقابل ($\bar{X}_0$) هي:

$$\boxed{Z_\alpha = \frac{\bar{X}_0 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}$$

لذا فان **منطقة الرفض** H0 هي $(Z_\alpha \leq Z)$ **ومنطقة القبول**

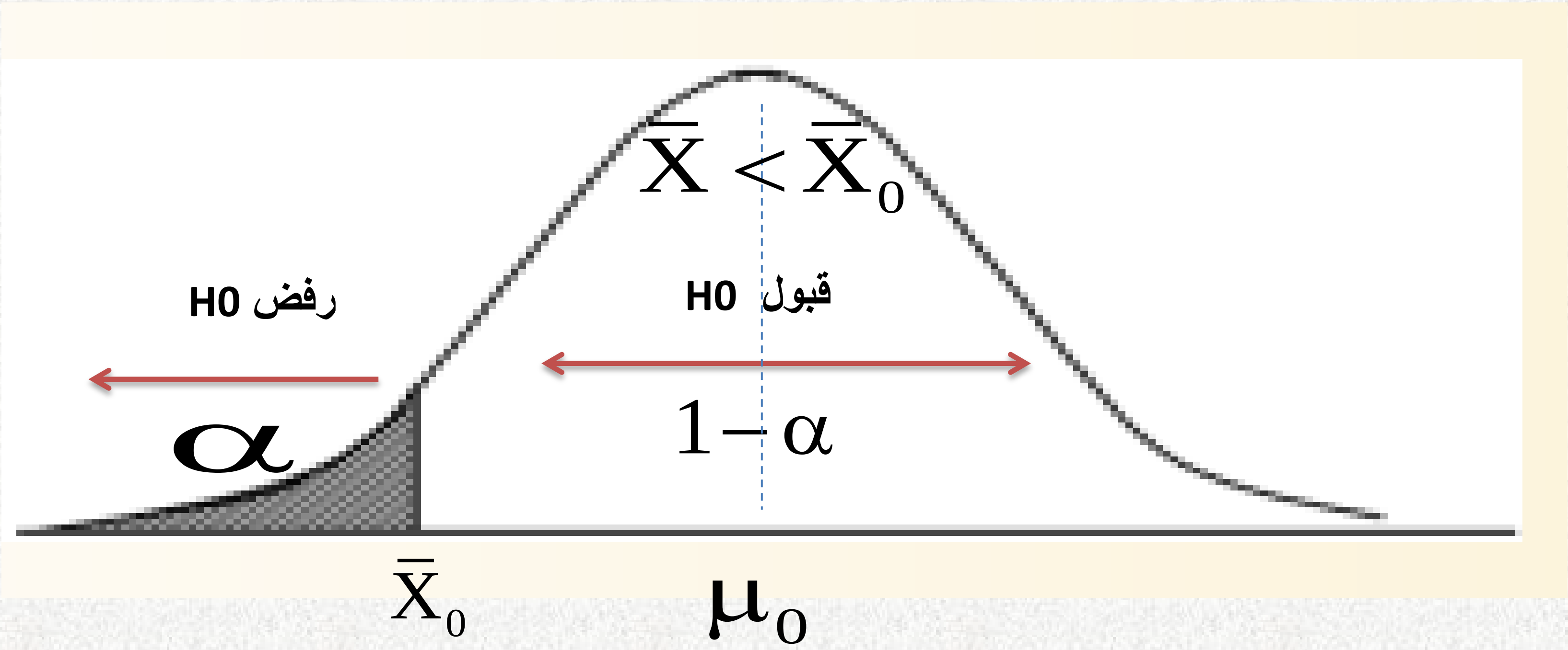
H0 هي $(Z_\alpha > Z)$.



ج) اذا كانت الفرضية البديلة من جانب واحد ايضاً:

$$\boxed{H_1 : \mu < \mu_0}$$

فان منطقة الرفض H0 ستقع على يسار منحنى توزيع $\bar{X}$.



Dr.Safwan Nathem Rashed

ويسمى هذا النوع من الاختبار باختبار ذو طرف واحد (طرف اليسار) وفي هذه الحالة تكون منطقة الرفض (H0) عندما ($\bar{X} \geq \bar{X}_0$) وتكون القبول (H0) عندما ($\bar{X} < \bar{X}_0$)

حيث ان:

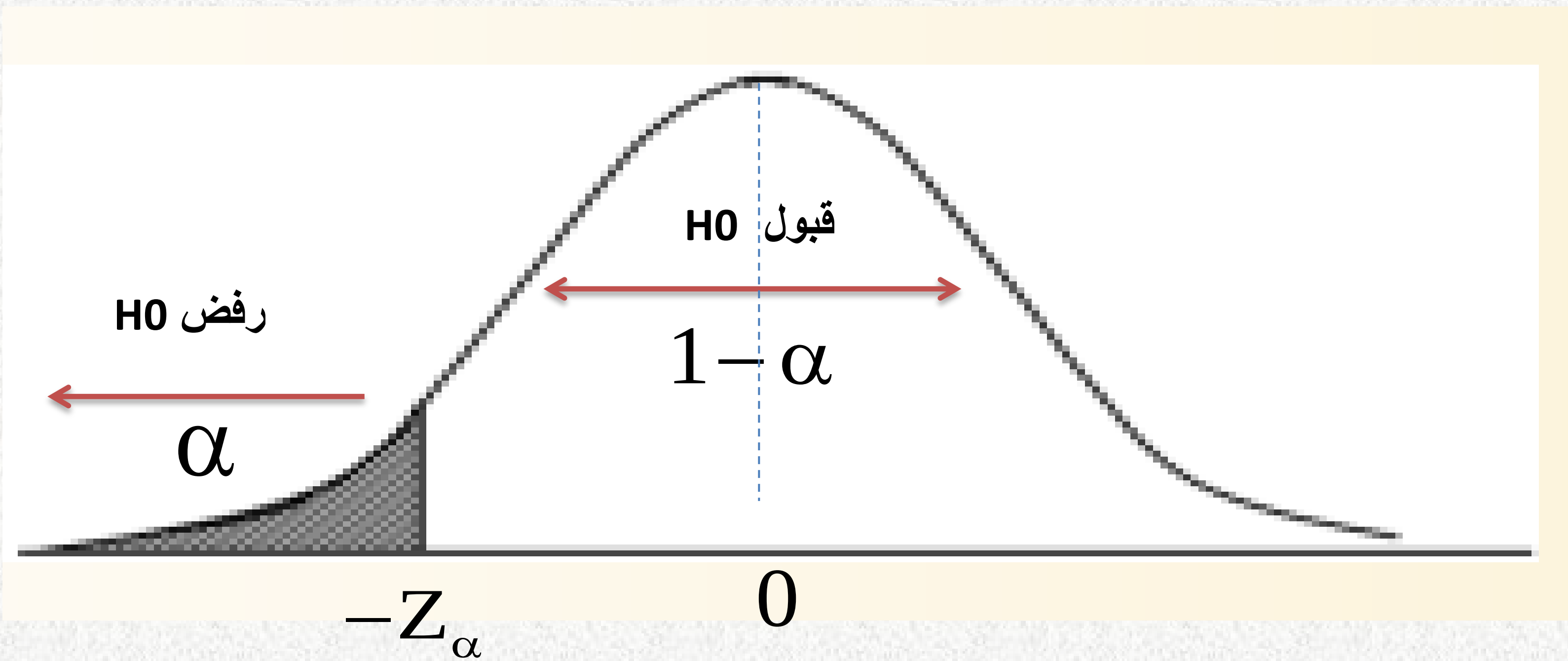
$$\boxed{\bar{X}_0 = \mu_0 - Z_\alpha \times \sigma_{\bar{X}}}$$

وباستخدام صيغة Z فان القيمة الحرجة لـ Z (منطقة الرفض) التي تقابل ($\bar{X}_0$) هي:

$$\boxed{Z_\alpha = \frac{\bar{X}_0 - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}$$

لذا فان منطقة الرفض H0 هي ($Z_{\alpha} \geq Z$) ومنطقة القبول

H0 هي ($Z_{\alpha} < Z$).



فروض التحليل: Assumption

١. العينة يجب ان تكون عشوائية.

٢. توزيع المجتمع المدروس يجب ان يكون طبيعياً او قريباً منه. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ متغيرات عشوائية

٣. توفر التباين σ^2 للمجتمع مطلوب دراسته او عدمه فاذا توفر سوف يتم استخدام اختبار Z مهما كانت حجم العينة اما في حالة عدم توفره اي غير معلوم يتم الاعتماد على تباين العينة وحجمها ان كان ($n \geq 30$) او ($n < 30$).

ملاحظة:

ان طريقة الاختيار الذي تم شرحه يكون التباين فيه (σ^2) معلوماً بالنسبة للمجتمع مهما كانت حجم العينة.

ولكن احياناً يكون من الصعب معرفة تباين المجتمع (σ^2) اي غير معلوماً وعليه يمكن استخدام تباين العينة (S^2) او تربيع الانحراف المعياري او القياسي ومنها يتم تحديد نوع الاختبار حسب حجم العينة ان كانت $n \geq 30$ او $n < 30$.

والجدول ادناه يوضح خطوات اختبار المتوسطات باستخدام معيار الاختبار الاحصائي Z على افتراض ان التباين (σ^2) معلوم مهما كانت حجم العينة او غير معلوماً ان كانت حجم العينة كبير.

خطوات الاختبار	اختبار ذو طرفين	اختبار ذو طرف واحد	
		يمين	يسار
١-فرضية العدم H0 ٢-فرضية بديلة H1	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$
٣-مستوى المعنوية	α		
٤-منطقة الرفض H0	$-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}$	$Z \geq Z_\alpha$	$-Z \leq -Z_\alpha$
٥-المختبر الاحصائي	$Z = \overline{X - \mu_0 / \sigma} / \sqrt{n}$		
٦-القرار	رفض H0 اذا كانت قيمة المختبر الاحصائي Z المطلقة اكبر من او يساوي قيمة الجدولية $\lvert Z \rvert \geq Z_{\alpha/2}$	رفض H0 اذا كانت قيمة المختبر الاحصائي Z المطلقة اكبر قيمة الجدولية $Z \geq Z_\alpha$	رفض H0 اذا كانت قيمة المختبر الاحصائي Z المطلقة اقل قيمة الجدولية $-Z \leq -Z_\alpha$

One- and Two-Tail : ملخص اتجاه الفرض

اختبار ذيل واحد متجه يسار One-Tail Test (left tail)	اختبار ذيل واحد متجه يمين One-Tail Test (right tail)	اختبار ذيلين عديم الاتجاه Two-Tail Test
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$