Lecture -5- (1)

EX: (1)

Let X be a r.v. with the following distribution. Find the cumulative distribution function (c.d.f.) of X.

X	-2	1	2	4
P(X) or f(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X ولدي بأحد القيم $X = -2, 1, 2, 4$ يقابلها قيمة الدالة f(x)

و كذلك يمكن كتابة هذه القيم و الدالة المقابلة لها بالصيغة العامة للدالة المتغير العشوائي المتقطع وكما يلي

$$P(X) \text{ or } f(X) = \begin{cases} \frac{1}{4} & X = -2 \\ \frac{1}{8} & X = 1 \\ \frac{1}{2} & X = 2 \\ \frac{1}{8} & X = 4 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

هذه الصيغة معناها ان قيمة الدالة $= \frac{1}{4}$ عندما $X=-2$

و $= \frac{1}{8}$ عندما $X=1, 4$

و $= \frac{1}{2}$ عندما $X=2$

و = صفر في اي حالة اخرى

خارج قيم X المحددة

اي ان $f(X)=0$ عندما مثلاً $X=-1$

او عندما $X=3$ أو عندما $X=5$ أو اي قيمة غير القيم الاربعة المحددة لـ X في اعلاه.

Sol.:

$F(X) = P(X \leq X)$ هذا التعريف العام لدالة التوزيع التراكمية $F(X)$ والتي تمثل احتمال ان المتغير العشوائي X يكون أقل أو يساوي قيمة معينة وهي (X).

~~وهنا~~ يمكن ايجاد قيمة $F(X)$ لكل قيم X المحددة في المثال

عندما $X=-2$

$$\Rightarrow F(-2) = F(X=-2) = P(X \leq -2) = P(-2) = \frac{1}{4}$$

عندما $X=1$

$F(X=1)=F(1)$ فان

$=P(X\leq 1)=P(-2)+P(1)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

عندما $X=2$

$F(X=2)=F(2)=P(X\leq 2)=P(-2)+P(1)+P(2)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$

عندما $X=4$

$F(X=4)=F(4)=F(X\leq 4)=P(-2)+P(1)+P(2)+P(4)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$

(*) نلاحظ من عملية حساب الدالة التراكمية (C.d.f.) انها عبارة عن تراكم (تجميع) الدالة $f(x)$ (أو $P(x)$) لكل القيم الاقل او التي تساوي القيمة الحقيقية لـ X.

(*) كما نلاحظ ان الدالة التراكمية عند القيمة الاخيرة (العليا) لـ X تساوي واحد دائماً.

ويمكن كتابة الدالة التراكمية بجميع قيمها (اي لكل قيم X) بصيغتها العامة وكالآتي.

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<-2\\ \frac{1}{4} & -2\leq X<1\\ \frac{3}{8} & 1\leq X<2\\ \frac{7}{8} & 2\leq X<4\\ 1 & X\geq 4\end{cases} \quad \dots (1)$$

ملاحظة: لو طلب منا ايجاد $F(X)$ عندما X تأخذ قيم أكل من اي قيمة لـ X والتي هي (-2) هنا فان قيمة $F(X)=0$ وكما مبين في القيمة الاولى لـ $F(X)$ في المعادلة (1) اعلاه.

وكذلك طلب منا ايجاد $F(X)$ عندما X تأخذ قيم أكبر من اعلى قيمة لـ X والتي هي (4) هنا سوف تكون $F(X)=1$ دائماً لاي قيمة اكبر من (4) في هذا المثال. وهذا مبين أيضاً في خصائص $F(X)$ المعروفة سابقاً.

4; 7 ; Relation between the $f(x)$ and $F(x)$:
العلاقة بين $f(x)$ دالة كثافة احتمال لمتغير لعشوائي X و، لدالة التراكمية $F(x)$.

$$\therefore F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

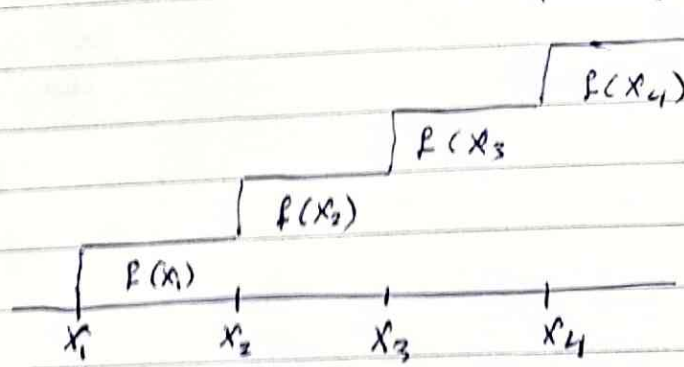
وعلى فرض ان $(x_1 < x_2 < x_3 < \dots)$ و بناءً أو طبقاً لخصائص ، لدالة التراكمية $F(x)$ (الخاصية الثالثة) فان

$$F(x_1) < F(x_2) < F(x_3) < \dots$$

وعليه فعند النقطتين x_i و $x_{(i-1)}$ (x_i و النقطة التي تسبقها اي الاصغر منها مباشرة وهي x_{i-1}) يمكن ايجاد $f(x)$ لدالة كثافة المتغير لعشوائي X (p.d.f.) من، الدالة، التراكمية $F(x)$ (c.d.f.) ، وكالآتي

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1})$$
$$= P(X = x_i) \quad \#_1 = f(x_i)$$

اي يمكن ايجاد دالة كثافة الاحتمال عند النقطة x_i وهي $f(x_i)$ من قيمة الدالة التراكمية للنقطة (x_i) و الدالة التراكمية للنقطة التي اقل منها مباشرة (x_{i-1}) .



EX: (2)

A man has four key in his pocket and since it is dark. He can not see which is his door key. He will try each key in turn until the find the right one. Let X be the number of keys tried (including the right one) to open the door. What is the p.d.f.? draw the diagram of the P.d.f. and find the c.d.f.

رجل لديه (4) مفاتيح في جيبه، وحيث انه كان الظلام دامساً فهو لا يستطيع رؤية مفتاح الباب، فهو سيحاول تجريب كل مفتاح حتى يجد المفتاح الصحيح. وعلى فرض ان (X) يمثل عدد المفاتيح التي حاول بها فتح الباب (بما فيها المفتاح الصحيح)، ما هي دالة كثافة الاحتمال p.d.f. (f(x))، ارسم مخطط الدالة واوجد الدالة التراكمية c.d.f. (F(x)).

Sol.:

∴ X تمثل عدد المفاتيح التي يحاول بها فتح الباب فان

$X = 1, 2, 3, 4$

$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
عندما جرب المفتاح الاول فانه $X=1$ (عدد المفاتيح)	عندما حاول بالمفتاح الاخر فاصبح عدد المفاتيح (2)	عندما حاول بالمفتاح الاخر فاصبح عدد المفاتيح هي (3)	عندما حاول بالمفتاح الاخر فاصبح عدد المفاتيح (4)

هذا منطوق السؤال نلاحظ ان فرصة ظهور كل مفتاح هي $\frac{1}{4}$ لان عدد المفاتيح الكلية هو (4) وان كل مفتاح سوف يظهر مرة واحدة فاذا احتمال اختيار اي مفتاح هي $\frac{1}{4}$.

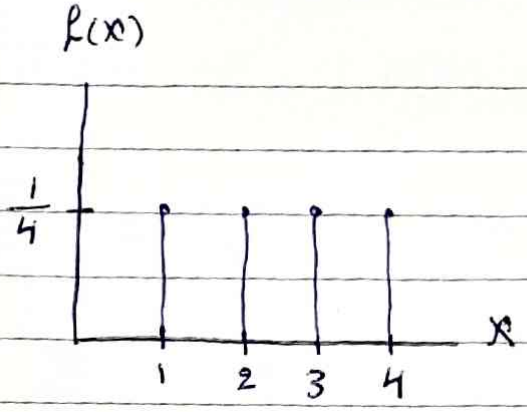
∴ $f(X=1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$ احتمال اختيار المفتاح الاول

$f(X=2) = P(X=2) = \frac{1}{4}$ = = الثاني

$f(X=3) = P(X=3) = \frac{1}{4}$ = = الثالث

$f(X=4) = P(X=4) = \frac{1}{4}$ = = الرابع

رسم هذه الدالة



وان دالة التوزيع التراكمي هي:

ملاحظة: دائماً نكتب التعريف العام لهذه الدالة حتى يكون كل شيء.

$$F(X) = P(X \leq X)$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(1) = \frac{1}{4}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(1) + P(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$P(X \leq 2)$ سوف تشمل $X=1$ وهي اقل من (2) و $X=2$ وهي في حالة لتساوي

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(1) + P(2) + P(3)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

والآن نكتب هذه النتائج للدالة التراكمية بالصيغة العامة لها.

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{2}{4} & 2 \leq X < 3 \\ \frac{3}{4} & 3 \leq X < 4 \\ 1 & X \geq 4 \end{cases}$$