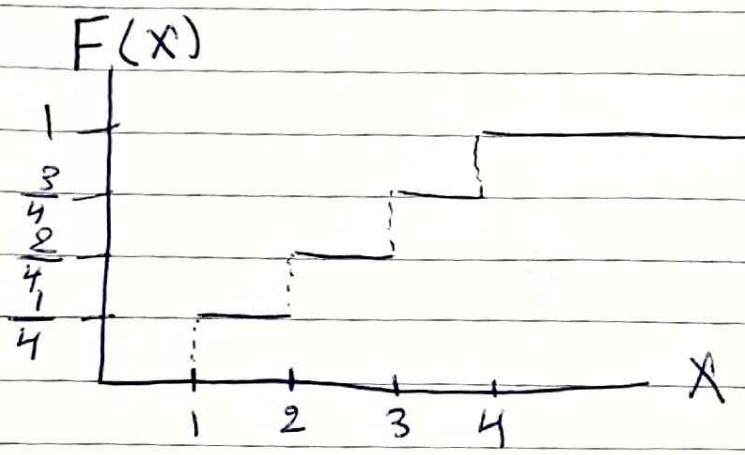
Lecture -6-

ويكون مخطط الدالة التراكمية $F(X)$ (c.d.f.) كالآتي



EX: (3)

The following function is c.d.f. ($F(X)$) of the discrete r.v. X (for all values of X). Find the p.d.f. of r.v. X from the $F(X)$.

الدالة أدناه هي دالة التوزيع التراكمي (c.d.f.) $F(X)$ للمتغير العشوائي المتقطع X (لكل قيم X)، أوجد دالة كثافة الاحتمال (p.d.f.) للمتغير العشوائي X من الدالة $F(X)$.

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \le X < 2 \\ \frac{3}{6} & 2 \le X < 3 \\ 1 & X \ge 3 \end{cases}$$

نلاحظ أن $X = 1, 2, 3$ وهذه القيم نأخذها من الفترة الموجودة أمام كل $F(X)$ ونأخذ القيمة التي تكون على يمين (≤) أي تحوي علامة (=)

Sol.:

$$f(1) = P(X=1) = P(0 < X \le 1) = F(1) - F(0)$$

$$f(1) = F(1) - F(0)$$
$$= \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$f(2) = P(X=2) = P(1 < X \leq 2)$$
$$= F(2) - F(1)$$
$$= \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

لان $F(\phi) = P(X \leq \phi) = 0$

نلاحظ ان $F(1) = \frac{1}{6}$ وهي
الفترة التي تقابل الفترة التي تأخذ العلامة (≤ 1)

$f(2) = \frac{2}{6}$ وان $F(2) = \frac{3}{6}$ وهي التي تقابل فترة ذات العلامة (≤ 2)
اي وجود علامة المساواة مع العلامة الاخرى مثل $(\leq)$.

$$f(3) = P(X=3) = P(2 < X \leq 3)$$
$$= F(3) - F(2)$$
$$= 1 - \frac{3}{6} = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$$

$$\therefore f(3) = \frac{3}{6}$$

$$\therefore f(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & X = 1 \\ \frac{2}{6} & X = 2 \\ \frac{3}{6} & X = 3 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

EX:(4)

Three balls are chosen at random out of (5) numbered balls from 2 to 6, Let X be the sum of the number on three balls, Construct $f(x)$ and Prove that is P.d.f., and find $F(x)$ $\forall x$ and find $F(20)$, $P(X>7)$, $P(X>12)$, $P(11 < X \leq 14)$.

اختيرت ثلاث كرات عشوائيا من بين (5) كرات وهذه الكرات الخمسة مرقمة (اي يوجد رقم على كل كرة) من 2 الى 6 (اي ان الكرات الخمسة مرقمة بـ (2, 3, 4, 5, 6)). اذا كان X يمثل مجموع الارقام على الكرات الثلاثة المختارة. اوجد دالة المتغير العشوائي (X) اي $f(x)$ وعرف ثم برهن انها دالة كثافة احتمال P.d.f. ثم اوجد الدالة التراكمية $F(x)$ لكل قيم (X) مع ايجاد الدالة التراكمية عند ما $(X=20)$ اي $F(20)$ بالاضافة الى الاحتمالات الموضحة في منطوق المثال.

Sol.:

الكرات مرقمة بـ ② ③ ④ ⑤ ⑥ : عدد الكرات الكلي $n=5$

عدد الكرات المختارة $r=3$

اول خطوة يجب تحديد عدد عناصر فضاء العينة S وذلك عن طريق استخدام التوافيق.

س: ماذا اخترنا التوافيق Combination

ج: لان الكرات مرقمة وان X يمثل مجموع الارقام على الكرات المختارة فلو كان الاختيار مثلاً الكرات المرقمة بـ (2, 3, 5) فان المتغير العشوائي X هنا قيمته $(2+3+5=10)$ لانه ذكرني المثال انه يمثل المجموع الارقام.

لو كانت الارقام للكرات المختارة هي (3, 5, 2) بهذا الترتيب وهو يختلف عن الترتيب الاول فان X في هذه الحالة سوف تكون قيمته $(3+5+2=10)$ اي نلاحظ ان X اخذ نفس القيمة اي بمعنى ان تسلسل اختيار الكرة لم يؤثر في قيمة X فلذلك ~~لا نستخدم التباديل~~ سوف نستخدم التوافيق ولا نستخدم التباديل.

$$\therefore n(S) = C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \, 2!} = 10$$

$\therefore S = \{234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456\}$

مجموع الأرقام لكل عنصر sum 9 10 11 11 12 13 12 13 14 15

$\therefore X = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$

وعليه فإن $f(x)$ لكل قيم X هي $[f(x), 1]$

X :	x_1 9	x_2 10	x_3 11	x_4 12	x_5 13	x_6 14	x_7 15
$P(X)=f(X)$:	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

عدد مرات ظهور مجموع = 9 هي مرة واحدة عند (10) تتابع ممكنة

عدد مرات ظهور مجموع = 10 هي مرة واحدة عند (10) تتابع ممكنة

عدد مرات ظهور مجموع = 11 هي مرتان عند (10) تتابع

وكذا بالنسبة لبقية القيم

(*) اما بالنسبة لبرهنة ان $f(x)$ هي p.d.f فيتم عن طريق تحقيق خواص p.d.f وهي

① $f(x_i) \geq 0$

نلاحظ ان جميع قيم $f(x_i)$ هي اكبر من او تساوي الصفر

∴ تحقق الشرط الاول

② $\sum_{i=1}^{7} f(x_i) = \sum_{x=9}^{15} f(x) = f(9) + f(10) + f(11) + f(12) + f(13) + f(14) + f(14)$

$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$

∴ الشرط الثاني تحقق وهو $\sum_{\forall x_i} f(x_i) = 1$

∴ بتحقق الشرطين اعلاه تكون $f(x_i)$ هي دالة كثافة احتمال (p.d.f.)

(*) ايجاد $F(X)$

$F(X) = P(X \leq x)$

$\Rightarrow F(9) = P(X \leq 9) = P(9) = \frac{1}{10}$

$F(10) = P(X \leq 10) = P(9) + P(10) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$

وكذلك يمكن إيجادها هنا

$F(10) = F(9) + P(10) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$

$\Rightarrow F(11) = P(X \leq 11) = P(9) + P(10) + P(11) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10}$

$= \frac{4}{10}$

$= F(10) + P(9) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$

$\Rightarrow F(12) = P(X \leq 12) = P(9) + P(10) + P(11) + P(12)$

$= F(11) + P(12)$

$= \frac{4}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$

$\Rightarrow F(13) = P(X \leq 13) = P(9) + P(10) + P(11) + P(12) + P(13)$

$= F(12) + P(13) = \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$

$\Rightarrow F(14) = P(X \leq 14) = P(9) + P(10) + P(11) + P(12) + P(13) + P(14)$

$= F(13) + P(14) = \frac{8}{10} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

$\Rightarrow F(15) = P(X \leq 15) = P(9) + P(10) + P(11) + P(11) + P(12) + P(13) + P(14)$

$+ P(15)$

$= F(14) + P(15)$

$= \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & x < 9 \\ \frac{1}{10} & 9 \leq x < 10 \\ \frac{2}{10} & 10 \leq x < 11 \\ \frac{4}{10} & 11 \leq x < 12 \\ \frac{6}{10} & 12 \leq x < 13 \\ \frac{8}{10} & 13 \leq x < 14 \\ \frac{9}{10} & 14 \leq x < 15 \\ 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

⊛ $F(20) = P(X \leq 20) = \underbrace{P(9) + \dots + P(15)}_{1} + P(20)$

$= 1 + 0 = 1$

لأن $P(20) = 0$ لأن العدد (20) أكبر من أعلى قيمة من قيم X وهي (15)

وعليه فإن قيمة $F(20)$

$F(20) = 1$

⊛ $P(X > 7) = P(8) + P(9) + \dots + P(15)$

$= 0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10} = 1$

↑ لأن 8 ليست من قيم المتغير X.

⊛ $P(X > 12) = P(13) + P(14) + P(15)$

العدد (12) ليس من ضمن الأرقام التي يأخذها المتغير X أكبر من 12.

$= \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$

⊛ $P(11 < X \leq 14) = F(14) - F(11)$ أما

$= \frac{9}{10} - \frac{4}{10} = \frac{5}{10}$

أو بهذه الطريقة $P(11 < X \leq 14) = P(12) + P(13) + P(14)$

الأعداد المحصورة بالاحتمال هي 12 و 13 و 14

$= \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$

لأن $X > 11$ فإن العدد 11 غير مقبول

وأن العدد 14 مقبول لأن $(X \leq 14)$ لوجود اليساوي مع علامة الأقل