Lecture-7-

Ex:(1) A r.v. X has the following p.d.f.
المتغير العشوائي X له دالة كثافة الاحتمال ادناه

X :	-2	-1	0	1	2	3
f(x) :	k	2k	3k	5k	7k	2k

① Find the value of k. اوجد قيمة k ،
② Find $P(X<1)$, $P(X\geq 0)$, $P(-1\leq X<2)$ اوجد الاحتمالات

Sol:

① f(x) is p.d.f. بما ان f(x) هي دالة كثافة احتمال
وعليه تكون f(x) تحقق شروط p.d.f. والتي اهمها ان مجموع دالة كثافة الاحتمال لكل قيم X تساوي واحد اي ان

$$\sum f(x_i) = 1 \quad \forall x_i$$

$$\Rightarrow f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=1$$

$$k+2k+3k+5k+7k+2k=1$$

$$20k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{20}$$

$\Rightarrow$

X	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

② $P(X<1) = P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)$

$$= \frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\frac{3}{20}=\frac{6}{20}$$

$P(X\geq 0) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

هنا قيم X تبدأ من الصفر واكبر (3) لوجود علامة = مع >

$$= \frac{3}{20}+\frac{5}{20}+\frac{7}{20}+\frac{2}{20}=\frac{17}{20}$$

$P(-1\leq X<2) = P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)$

هنا قيم X تبدأ من (-1) لانه X اكبر او تساوي و تنتهي بـ (1) لانه X اقل من 2.

$$= \frac{2}{20}+\frac{3}{20}+\frac{5}{20}=\frac{10}{20}$$

EX: (2)

Let the p.d.f. of the r.v. X is given by:

لنفرض ان دالة كثافة احتمالية (p.d.f) للمتغير العشوائي X معطاة بـ: ←

$$f(X) = \begin{cases} \frac{cX}{6} & , X = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

① Find the constant c.

اوجد قيمة الثابت c

② Find $P(X>0)$, $P(X \leq 1)$, $P(|X|<1)$, $P(|X-1|+1<2)$

اوجد ايضا احتمالات ↑

Sol:

① ∵ f(X) is p.d.f. بما ان f(X) هي دالة كثافة احتمالية:

$$\Rightarrow \sum_{\forall X} f(X) = 1$$

$$\Rightarrow P(X=0) + f(X=1) + f(X=2) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{6}(0) + \frac{c}{6}(1) + \frac{c}{6}(2) = 1$$

$$0 + \frac{c}{6} + \frac{2c}{6} = 1$$

$$\frac{3c}{6_2} = 1$$

$$\therefore \boxed{c = 2}$$ نعوض قيمة c المستخرجة في الدالة f(x)

$$\therefore f(X) = \frac{2X}{6} = \frac{X}{3}$$

وبعد ذلك نستخدم f(X) هذه اي بعد تعويض قيمة c فيها.

$$\therefore f(X) = \begin{cases} \frac{X}{3} & , X = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

② $P(X>0) = f(X=1) + f(X=2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

X تاخذ القيم الاكبر من (0) وهي 1 و 2.

$$= \frac{3}{3} = 1$$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + f(1) = \frac{0}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

احتمال ان X تاخذ القيم التي
X تاخذ القيم الواحد مع
القيم الاقل منها وهي (0) فقط

$P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = f(0) = 0$

احتمال ان X تاخذ القيم التي
اقل من او واحد و اكبر من او -
وهي (الصفر)

(x) اذا اردنا ايجاد احتمال قيمة مطلقة فنأخذ القيمة نفسها التي بعد العلامة المطلقة وهي ($1 <$) اي (1) ولكن باشارة معاكسة اي (-1) ونحول الفترة الى فترة ذات طرفين كما في اعلاه.

$P(|X-1|+1 < 2) = P(|X-1| < 2-1) = P(|X-1| < 1)$

$= P(-1 < X-1 < 1) = P(-1+1 < X < 1+1)$

$= P(0 < X < 2)$

وهذا يمثل قيم X الاكبر من الصفر واقل من 2 وهي (1).

$= P(X=1) = \frac{1}{3}$

4.8: The expectation of discrete random variable:
التوقع للمتغير العشوائي المتقطع

Let X be a r.v. on a sample space S and $f(x_i) = p(X=x_i)$ is called the distribution or probability function of X and usually given in the form of a table:

لنفرض أن X هو متغير عشوائي في فضاء العينة S و $f(x_i)=P(X=x_i)$ تعرف بالتوزيع او دالة احتمال X والتي عادة تعطى في صيغة الجدول الآتي:

x_1	x_2	...	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

and $f(x_i)$ satisfies the conditions 1) $f(x_i) \geq 0$, 2) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

و ان $f(x_i)$ تحقق الشرطين ① ان الدالة لكل قيم x_i هي موجبة و ② ان مجموع قيمة الدالة لكل قيم x_i الممكنة يساوي الواحد.

then: فان

① The mean or expectation or expected value of X denoted by $E(X)$ or μ_x or simply E or μ is defined by: $E(X)$

المتوسط أو التوقع أو القيمة المتوقعة لـ X يرمز لها بـ $E(X)$ أو μ_x أو μ أو E للتبسيط وتعرف بالآتي:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

توقع X يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة من قيم x_i في الدالة لهذه القيمة $f(x_i)$

EX:(1)

A coin weighted so that $P(H) = \frac{2}{3}$ and $P(T) = \frac{1}{3}$ is tossed three times. The probabilities of points in the sample space S is:

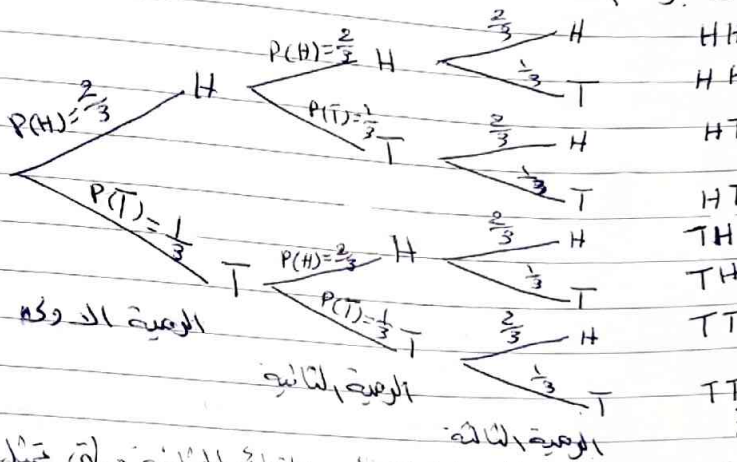
$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

قطعة نقود موزونة بحيث ان $P(H)=\frac{2}{3}$ ، احتمال ظهور الكتابة $P(T)=\frac{1}{3}$ رميت ثلاث مرات، احتمالات النقاط (العناصر) في فضاء العينة S والذي هو S، (سوف نقوم بحساب احتمالات كل عناصر S بالتفصيل).

Sol:

⊗ في تجارب او امثلة سابقة عند رمي قطع النقود كما كسب احتمال مثلاً ظهور 3 صور هو كان $P(A)=\frac{1}{8}$ لان قطعة النقود كانت اعتيادية وكان احتمال ظهور الصورة والكتابة متساوي ويساوي $=\frac{1}{2}$ اما هنا فان القطعة موزونة وان $P(H)=\frac{2}{3}$ والـ $P(T)=\frac{1}{3}$ ولا يمكن ان كسب الاحتمال الا عن طريق ضرب الاحتمالات وكالآتي:

نقوم برسم المخطط الشجري أولاً للمسألة ومن ثم حساب الاحتمالات:



سوف يتم حساب احتمال ظهور كل نتيجة من النتائج الممكنة في التي تمثل عناصر S عن طريق ضرب الاحتمالات للمسار الذي يمثل النتيجة وكالآتي:

$$P(HHH) = P(H)\cdot P(H)\cdot P(H) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$
$$P(HHT) = P(H)\cdot P(H)\cdot P(T) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$
$$P(HTH) = P(H)\cdot P(T)\cdot P(H) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$
$$P(HTT) = P(H)\cdot P(T)\cdot P(T) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$
$$P(THH) = P(T)\cdot P(H)\cdot P(H) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$
$$P(THT) = P(T)\cdot P(H)\cdot P(T) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$
$$P(TTH) = P(T)\cdot P(T)\cdot P(H) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$
$$P(TTT) = P(T)\cdot P(T)\cdot P(T) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

Let X be a r.v. which represents the number of occurrence the "Tail"

لنفرض ان X متغير عشوائي يمثل عدد الكتابة التي تظهر.

Find the expected value of X ?

أوجد توقع المتغير X.

ان عدد مرات ظهور الكتابة يكون حسب عدد حظة النتائج في S فنلاحظ ان الكتابة لا تظهر عندما تكون النتيجة (HHH) اي يعني ان ظهور الكتابة = 0 (صفر) وتظهر الكتابة مرة واحدة في النتائج (THH)، (HTH)، (HHT)

وتظهر الكتابة مرتان في التتابع (TTH), (THT), (HTT) ، وتظهر الكتابة (3) مرات في النتيجة (TTT) وهذا يدل على ان متغير العشوائي X يأخذ القيم:

$X = 0, 1, 2, 3$ عدد مرات ظهور الكتابة

وعليه فانه توقع متغير العشوائي X هو

$$E(X) = \sum_{i=0}^{4} X\, f(x_i)$$

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

$$E(X) = (0)\,P(X=0) + (1)\,P(X=1) + (2)\,P(X=2) + (3)\,P(X=3)$$

$$P(X=0) = P(HHH) = \frac{8}{27}$$

$$P(X=1) = P(HHT \text{ or } HTH \text{ or } THH) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$
$$= \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$$

$$P(X=2) = P(TTH \text{ or } THT \text{ or } HTT) = P(TTH) + P(THT) + P(HTT)$$
$$= \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27}$$

$$P(X=3) = P(TTT) = \frac{1}{27}$$

$$\therefore E(X) = (0)\left(\frac{8}{27}\right) + (1)\left(\frac{12}{27}\right) + (2)\left(\frac{6}{27}\right) + (3)\left(\frac{1}{27}\right)$$
$$= 0 + \frac{12}{27} + \frac{12}{27} + \frac{3}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

ملاحظة: $E(X)$ يمكن ان يساوي اي قيمة عددية

$\therefore E(X) = 1$ اي ليس شرطاً ان يساوي لواحد.