احصاء حيوي

الكورس الاول

(موضوع المحاضرة)

اختبارات تتعلق بالفرق بين وسطين حسابيين

Test Concerning of Two Means

Dr.Safwan Nathem Rashed

اختبارات تتعلق بالفرق بين وسطين حسابيين

يهتم هذا النوع من الاختبارات على وجود فروق بين متوسطي مجتمعين لحالتين مختلفتين او مقارنة هذا الفرق مع مقدار معين يضعه الباحث لاختبار الفرق بينهما، هناك عدة حالات لهذه الاختبارات وسوف نتطرق لها بالتفصيل وكما يلي:

- اختبارات تتعلق بمتوسطين في حالة العينات الكبيرة.
- اختبارات تتعلق بمتوسطين في حالة العينات الصغيرة.
- اختبار الفرق بين وسطين حسابيين مرتبطين.

- **اختبارات تتعلق بمتوسطين في حالة العينات الكبيرة**

في كثير من الاحيان قد يكون رغبة الباحث في المقارنة بين متوسطي مجتمعين (μ_1, μ_2) هل يتساويان ام هناك فرق بينهما وقيمة الفرق تساوي قيمة معينة، ففي هذه الحالة تصاغ الفرضية على اساس مقارنة الفرق بين المتوسطين، ويكون تباين المجتمعين هما (σ_1^2, σ_2^2) على التوالي وعلى الفرض ان المجتمعين مستقلين عن بعضهما بشكل تام.

فمثلاً عندما يكون اهتمام الباحث في مقارنة نوعين من التغذية على الاطفال حديثي الولادة او مقارنة صنفين من الذرة الصفراء او نوعين من انواع اطارات السيارات او مقارنة نتيجة امتحان لمادة محددة لمرحلة الثالث بين الذكور والاناث ...الى اخره. وبصورة عامة فإننا نبدأ ببناء الفرضية الاحصائية واولها فرضة العدم بالصيغة الاتية:

$$\boxed{H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0}$$

$\boxed{d_0 :}$ هي قيمة معينة معلومة تمثل الفرق بين المتوسطين.

اما الفرضية البديلة التي تكون ضد لفرضية العدم والمكملة لها سوف تصاغ بإحدى الحالات والتي تم التعرف عليها سابقاً وكالاتي:

$$\text{v.s.}\begin{cases} H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases}$$

مما يدل ان منحنى التوزيع اما ان يكون من طرف واحد من (اليمين او اليسار) او من طرفين المنحنى.

عندما تكون $(d_0=0)$ فان فرضية العدم تدل على ان المتوسطين متساويين اي ان:

$$\boxed{H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \;\; ; H_0 : \mu_1 = \mu_2}$$

وعليه فان الفرضية البديلة تكون:

$$\text{v.s.} \begin{cases} H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & ; \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 & ; \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 & ; \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

وما تم ذكره سيكون اول جزء في اختبار الفرضيات لبيان الفرق بين متوسطين، معتمدين على مستوى المعنوية لغرض تحديد منطقة القبول والرفض لفرضية العدم H_0 فضلاً عن تحديد القيمة الحرجة المأخوذة من الجداول الاحصائية ليتم من خلالها رسم المنحنى.

لنبدأ باختبار الفرق بين متوسطين معتمدين فيها على توزيع المعاينة للمتغير العشوائي $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$. فاذا كان $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يمثل الفرق بين متوسطين لعينتين مستقلتين ذات تباين معلوم لكلا المجتمعين (σ_1^2, σ_2^2) ومهما كان حجم العينتين (n_1, n_2) كبيرين او صغيرين على التوالي، فان المختبر الاحصائي هو:

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad ; \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

ويتم مقارنة الاختبار مع الجداول الاحصائية لغرض اتخاذ القرار.

اما في حالة **عدم توفر تباين المجتمعين** (σ_1^2, σ_2^2) سوف نستفاد من تباين العينتين (S_1^2, S_2^2) ويتم استخدامهما اذا كان حجم العينتين (n_1, n_2) كبير اي $(n_1, n_2 \geq 30)$ ليتم الاعتماد على معيار الاختبار الاحصائي الاتـي:

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad ; S_1^2 \neq S_2^2$$

ملاحظة: معيار الاختبار الاحصائي السابقين يدلان على عدم التجانس التباين اي التباينين غير متساويين.

ملاحظة: استكمالاً لما جاء سابقاً فان تبين المجتمعين في حالة تساويهما اي تجانسهما فان صيغ المختبر الاحصائي يكون على النحو الاتي:

$$Z_{cal}=\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sigma_s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\quad;\quad \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_s^2$$

او

$$Z_{cal}=\frac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\quad;\quad S_1^2=S_2^2=S_s^2$$

مثال: في دراسة حول تعليم الاطفال المتخلفين عقلياً انتخب (35) من الذكور و(31) من الاناث واجريت عليهم الدراسة بعد اعطائهم علاج معين، وبعد مرور سنة على العلاج تبين ان متوسط نقاط التقدم التي حصل عليها الذكور ($\bar{X}_1 = 67$) والاناث ($\bar{X}_2 = 61.5$) وعلى فرض ان توزيع هذه النقاط هو توزيع طبيعي بتباين ($\sigma_1^2 = 121, \sigma_2^2 = 100$) على التوالي، فهل تعطي هذه البيانات دليلاً كافياً على كون الوسط الحقيقي لدرجات الذكور اكبر من الوسط الحقيقي لدرجات الاناث تحت مستوى احتمال ($\alpha = 0.05$) .

Sol/

d_0: لا يوجد قيمة معينة تدل على الفرق بين المتوسطين.

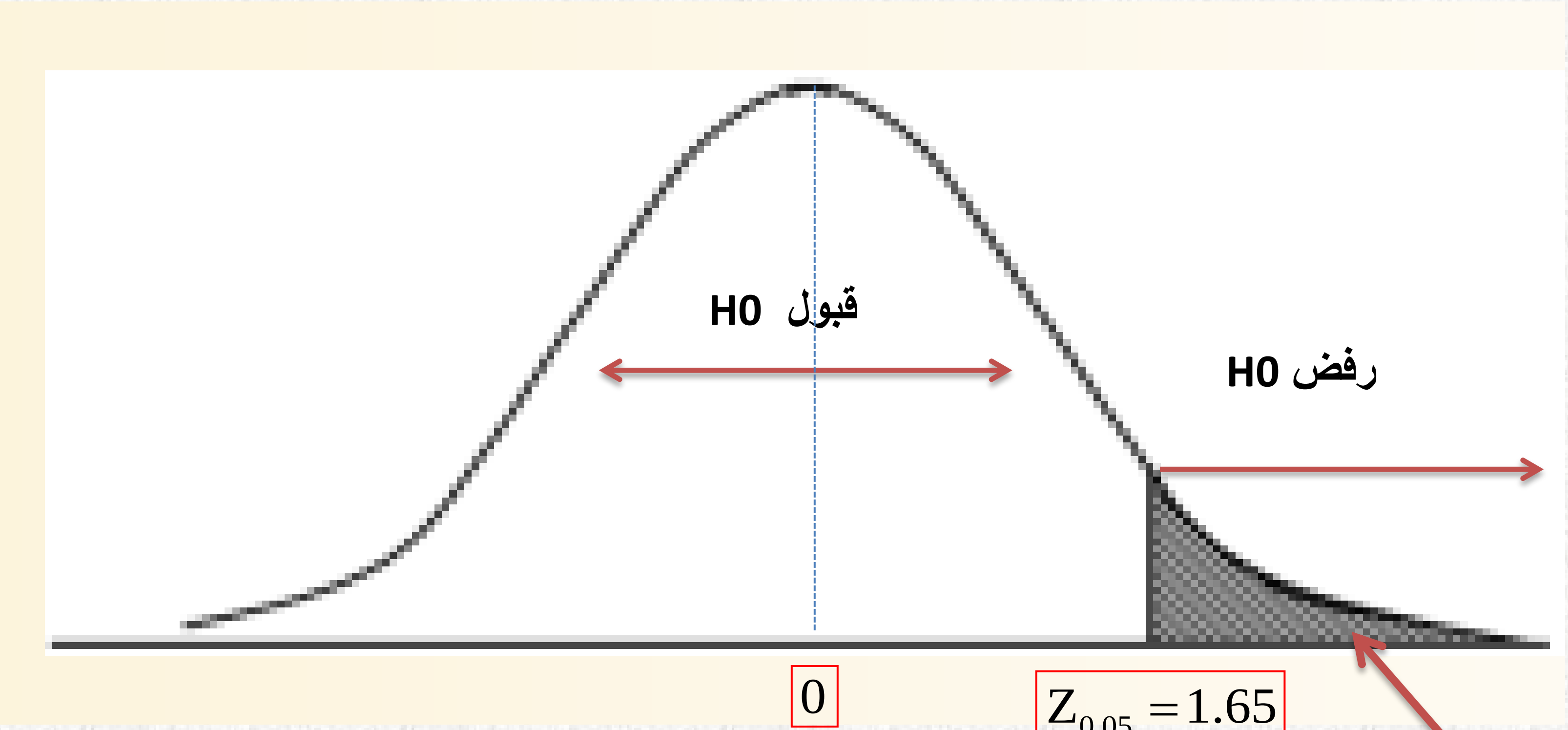
$$1-\boxed{\begin{array}{l} H_0:\mu_1-\mu_2=0 \quad ; \quad H_0:\mu_1=\mu_2 \\ H_1:\mu_1-\mu_2>0 \quad ; \quad H_1:\mu_1>\mu_2 \end{array}}$$

$$3-\boxed{\alpha=0.05 \to Z_{0.05}=1.65} \qquad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$4-\boxed{\begin{array}{l} Z_{cal}=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\dfrac{(67-61.5)-0}{\sqrt{\dfrac{121}{35}+\dfrac{100}{31}}} \\ =\dfrac{5.5}{\sqrt{3.457+3.226}}=\dfrac{5.5}{2.585}=2.128 \end{array}}$$

$$Z_{cal} = 2.128$$

5- اذا مناطق القبول او الرفض لفرضية العدم ستكون



$$Z_{0.05} = 1.65$$

$$Z_{cal} = 2.128$$

6–

القرار: نلاحظ ان القيمة المحسوبة لـ Z_{cal} اكبر من القيمة الجدولية لـ Z_{table} اي ان $(Z_{table}<Z_{cal})$ فضلاً عن ان القيمة المحسوبة تقع في منطقة رفض H_0 تحت المنحنى وهذا يدل على القبول بالفرضية البديلة ورفض فرضية العدم H_0، اي ان هناك في الدراسة حول تعليم الاطفال المتخلفين عقلياً بين الذكور والاناث، حيث كانت درجة العلاج بالنسبة للذكور فعلاً اكبر من درجة الاناث.

مثال: في تجربة لاختبار دواء أُنتج حديثاً لمعرفة ما اذا كان مؤثراً في تغيير معدل النبض للفأر التجارب، حيث اخذت مجموعتان منهم الاولى اعطيت لها الدواء الحديث والثانية تمثل مجموعة ضابطة اعطيت لها مادة ليست لها تأثير مكونة من ماء مقطر وحبوب السكر، وتم قياس معدل نبض كل فأر بعد فترة زمنية مناسبة، والبيانات موضحة ادناه:

$$n_1 = 37 \quad ; \; n_2 = 40$$

$$\bar{X}_1 = 290 \; ; \; \bar{X}_2 = 287 \quad , \quad S_1^2 = 196 \quad ; \; S_2^2 = 144$$

اختبر تأثير الدواء على معدل النبض بمستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$.

Sol/

d_0: لا يوجد قيمة معينة تدل على الفرق بين المتوسطين.

$$1- \boxed{H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad ; \quad H_0: \mu_1 = \mu_2}$$

$$2- \boxed{H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad ; \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2}$$

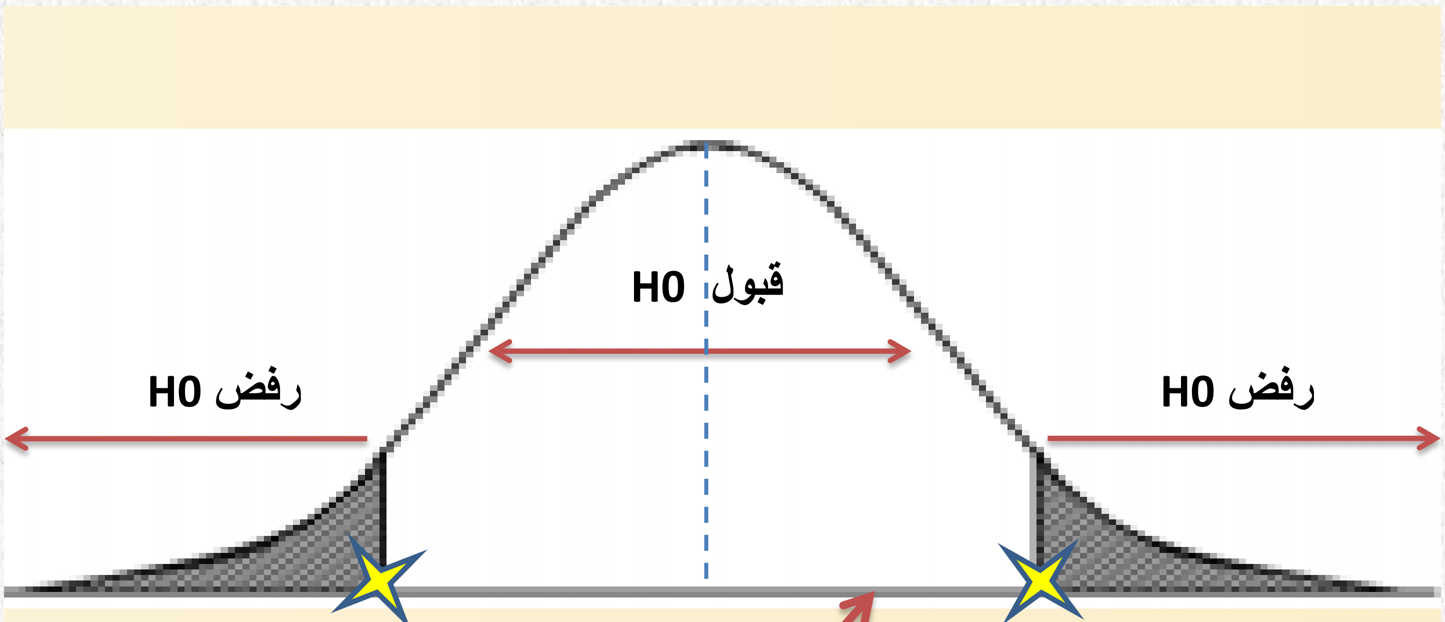
$$3- \boxed{\alpha = 0.05 \to Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96} \qquad S_1^2 \neq S_2^2$$

$$4- Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(290 - 287) - 0}{\sqrt{\frac{196}{37} + \frac{144}{40}}}$$

$$= \frac{3}{2.98} = 1.01$$

$$\boxed{Z_{cal} = 1.01}$$

5- الرسم البياني لتوضيح مناطق الرفض والقبول



$$-Z_{(0.025)} = -1.96$$

$$Z_{(0.025)} = 1.96$$

$$Z_{cal} = 1.01$$

6-

القرار: نلاحظ ان القيمة المحسوبة لـ Z_{cal} اقل من القيمة الجدولية لـ Z_{table} اي ان $(Z_{table}>Z_{cal})$ فضلاً عن ان القيمة المحسوبة تقع في منطقة قبول H_0 تحت المنحنى وهذا يدل على القبول فرضية العدم H_0 ورفض الفرضية البديلة، اي ان متوسط النبض بين المجموعتين متساويين اي لا يوجد فروق معنوية بينهما والذي ياكد على ان الدواء الحديث ليس له تأثير على معدل النبض.