4.9: Properties of Expectation: خصائص التوقع

1) If X is a r.v. and K is real number, then
اذا كان X متغير عشوائي وان K هو عدد حقيقي فان

a) $E(KX) = K\,EX$

b) $E(K+X) = K + EX$ اي بمعنى ان توقع الثابت = الثابت
اي $EK = K$

2) If X and Y be a random variabes on the Sample space S, then
اذا كان X و Y متغيرات عشوائية في فضاء العينة S فان:

$$E(X+Y) = EX + EY$$

and if $X_1, X_2, \dots, X_n$ be random variables on S, then
اذا كان $X_1, X_2, \dots X_n$ متغيرات عشوائية في الفضاء S

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E X_1 + E X_2 + \dots + E X_n$$

3) IF H is a function of the r.v. X then
اذا كانت H دالة بدلالة المتغير العشوائي X فان

$$E(H(X)) = \sum H(X)\ f(X_i)$$

4.10: Variance and standard deviation:
التباين والانحراف المعياري

Let X be a r.v. with the following dist.
لنفرض ان X متغير عشوائي بالتوزيع الآتي:

X_1	X_2	...	X_n
$f(X_1)$	$f(X_2)$	..	$f(X_n)$

Then the variance of X, denoted by Var(X) or V(X) is defined by:
فان تباين X يرمز له بالرمز V(X) او Var(X) ويعرف بالآتي:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - M)^2\ f(X_i) = E(X_i - M)^2$$

where M is the mean of r.v. X.

The standard deviation of X, denoted by σ_X is the (non-negative) square root of $V(X)$.

الانحراف المعياري لـ X يرمز له بالرمز σ_X وهو (غير سالب) يجذر التباين اي $\sqrt{V(X)}$.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Theorem: نظرية

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = EX^2 - (EX)^2$$

Proof:

Using $\sum x_i f(x_i) = \mu$ and $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$, we have

$$\sum (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) f(x_i)$$

$$= \sum x_i^2 f(x_i) - 2\mu \underbrace{\sum x_i f(x_i)}_{=EX=\mu} + \mu^2 \sum f(x_i)$$

$$= EX^2 - 2\mu\mu + \mu^2(1)$$

$$= EX^2 - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= EX^2 - \mu^2$$

$\because \mu = EX$

$$\therefore \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i) = EX^2 - (EX)^2$$

4.11: Properties of the variance: خصائص التباين

1) Let X be a r.v. and k is a real number, then

اذا كان X متغير عشوائي و k عدد حقيقي فان

a) $V(X+k) = V(X)$

b) $V(kX) = k^2 V(k)$

$\Rightarrow \sigma(X+k) = \sigma_X$, $\sigma_{kX} = |k| \sigma_X$

لان الثابت k لا يعبر عن التشتت ↑

$$\sigma_{kX} = \sqrt{k^2 V(X)} = \sqrt{k^2}\, \sigma_X$$

$$= \mp k\, \sigma_X$$

EX: (1)

Let the p.d.f. of x be given by:

اذا كانت دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي X معطاة كالآتي:

X	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Compute EX , EX^2 , $V(X)$, σ_X , $E(|X|)$ احسب

$E(2X)$, $E(-4X)$

$$E(X) = \sum_{x=-1}^{2} x\, f(x) = (-1)\frac{1}{8} + (0)\frac{3}{8} + (1)\frac{1}{4} + (2)\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{-1+2+4}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\therefore E(X) = \frac{7}{8} = \mu$$

$$E(X^2) = \sum_{x=-1}^{2} x^2 f(x) = (-1)^2\frac{1}{8} + (0)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (1)^2\frac{1}{4} + (2^2)\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1+2+8}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\therefore E(X^2) = \frac{11}{8}$$

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{11}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{11}{8} - \frac{49}{64}$$

$$V(X) = \frac{88-49}{64} = \frac{39}{64}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{39}{64}}$$

$$E(|X|) = \sum_{x=-1}^{2} |x|\, f(x) = |-1|\frac{1}{8} + |0|\frac{3}{8} + |1|\frac{1}{4} + |2|\frac{1}{4}$$

ان توقع القيمة المطلقة يساوي المجموع لكل قيم x كل حاصل ضرب لقيمة مطلقة معينة في الدالة الاحتمالية.

(*) عند معرفة التوقع لاي شيء اي تقدير حسابي او اي دالة بدلالة x او اي ثابت) يمثل المجموع كامل ضرب ذلك الشيء في الدالة الاحتمالية $f(x)$ وهذا المجموع محدود لكل قيم x .

$$E(\cdot) = \sum (\cdot) f(x)$$

(لكل قيم x ∀ x صحيحا)

(·) تقدير عدد اي شيء

(*) $$E(2X) = \sum_{x=-1}^{2} (2x) f(x) = 2E(X) = 2\sum_{x=-1}^{2} x f(x)$$

$$= 2\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{4}$$

(توقع X من المطلوب الاول)

(*) $$E(-4X) = -4E(X) = -4\left(\frac{7}{8}\right) = -\frac{7}{4}$$

EX: (2)

A player tosses a fair die. If a prime number occurs, he wins that number of dinars, but if a non prime number occurs, he loses that number of dinars. The possible outcomes x_i of the game with their respective probabilities $P(x_i)$ are as follows

x_i	2	3	5	-1	-4	-6
$P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Is the player a winner or a loser in this game?

لاعب رمي زهر نرد اعتيادي. اذا كان الرقم الظاهر هو عدد اولي فانه اللاعب ربح دنانير (نقود) بعدد (نفس الرقم الذي ظهر)، لكن اذا ظهر عدد غير اولي فانه اللاعب خسر دنانير (نقود) بعدد (نفس العدد الذي ظهر). النتائج الكلية الممكنة للعبة مع احتمالاتها موضحة في الجدول (الجدول المطلوب).

المطلوب: هل اللاعب ربح ام خسر اللعبة؟

توضيح: ان الاعداد الاولية من الاعداد الموجودة على وجوه المكعبين الاعتيادي هي (2, 3, 5) والاعداد الاخرى الغير اولية هي (1, 4, 6) فاذا ظهر احد الاعداد الاولية فسوف ياخذ اللاعب نفس العدد نقود اي ان المتغير العشوائي X سوف ياخذ الارقام (2, 3, 5). واذا ظهر احد الاعداد غير الاولية فسوف يخسر اللاعب نفس العدد نقود اي ان المتغير العشوائي X سوف ياخذ الارقام (-1, -4, -6) لانه سوف يخسر اي تكون اشارة سالبة. وقيم $P(X_i)$ المقابلة لكل رقم سوف تمثل $\frac{1}{6}$ لكل النتائج الممكنة لانه عند رمي حجر النرد ظهور اي رقم من الارقام الستة هو (1) وعدد النتائج الكلية الممكنة للتجربة هي 6 اي $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sol.:

ان تحديد خسارة اللاعب او ربحه يتم عن طريق حساب معدل المتغير X اي حساب القيمة المتوقعة لـ X اي

$$M = E(X) = \sum_{i=1}^{6} X_i P(X_i) = (2)\left(\frac{1}{6}\right) + (3)\left(\frac{1}{6}\right) + (5)\left(\frac{1}{6}\right) + (-1)\left(\frac{1}{6}\right) + (-4)\left(\frac{1}{6}\right) + (-6)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{5}{6} - \frac{1}{6} - \frac{4}{6} - \frac{6}{6}$$

$$E(X) = \frac{10 - 11}{6} = -\frac{1}{6}$$

$\therefore E(X)$ (او متوسط X) هو عدد سالب ظاهر اللاعب خسر في هذه اللعبة.

واجب :

EX:(1)

Let X have the p.d.f. لنفرض ان X لها دالة كثافة احتمال هي

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{10} & , x=1,2,3,4\\ 0 & , o.w.\end{cases}$$

Find: $E(X)$, $V(X)$, $E(X(5-X))$, σ_X اوجد

EX:(2)

Let X have the c.d.f.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ \frac{1}{4} & -2\le x<1\\ \frac{3}{8} & 1\le x<2\\ \frac{7}{8} & 2\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

Find: $E(X)$, $V(X)$, σ_X , $E(2|X|)$, $E(X+3)$, $E(X^2-2X+3)$

واجب :

EX:(1)

Let X have the p.d.f. لنفرض ان X لها دالة كثافة احتمال هي ←

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & , x = 1,2,3,4 \\ 0 & , O.W. \end{cases}$$

Find: $E(X)$, $V(X)$, $E(X(5-X))$, σ_X اوجد

EX:(2)

Let X have the c.d.f.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{4} & -2 \leq x < 1 \\ \frac{3}{8} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Find: $E(X)$, $V(X)$, σ_X , $E(2|X|)$, $E(X+3)$
$E(X^2-2X+3)$