احصاء حيوي

الكورس الاول

(موضوع المحاضرة)

اختبارات تتعلق بالفرق بين وسطين حسابيين

Test Concerning of Two Means

Dr.Safwan Nathem Rashed

اختبارات تتعلق بالفرق بين وسطين حسابيين

يهتم هذا النوع من الاختبارات على وجود فروق بين متوسطي مجتمعين لحالتين مختلفتين او مقارنة هذا الفرق مع مقدار معين يضعه الباحث لاختبار الفرق بينهما، هناك عدة حالات لهذه الاختبارات وسوف نتطرق لها بالتفصيل وكما يلي:

- اختبارات تتعلق بمتوسطين في حالة العينات الكبيرة.
- اختبارات تتعلق بمتوسطين في حالة العينات الصغيرة.
- اختبار الفرق بين وسطين حسابيين مرتبطين.

- **اختبارات تتعلق بمتوسطين المستقلين في حالة العينات الصغيرة**

في كثير من الاحيان قد يكون التباين غير معلوماً للمجتمعين (σ_1^2 , σ_2^2) وان حجم العينتين تكونان صغير (n<30) علماً ان العينتين المأخوذة من مجتمعين يتوزعان توزيعاً طبيعياً او قريب منه. وبفرض ان العينتين مستقلتين، فان فرضية العدم H_0 التي يتم بنائها في هذه الحالة حسب اختبار الخاص بمقارنة المتوسطين يكون كالاتي:

عندما تكون (d0=0) فان فرضية العدم لوسطين متساويين هو:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \ \ ; H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

وعليه فان الفرضية البديلة التي تم توضيحها سابقاً تكون:

$$\text{v.s.} \begin{cases} H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & ; \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 & ; \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 & ; \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

واذا رجعنا الى تباين المجتمعين سوف نجد حالتين هما.

١. عندما يكون تباين المجتمعين غير معلومين ومتجانسين (متساويين).

٢. عندما يكون تباين المجتمعين غير معلومين وغير متجانسين (غير متساويين).

١- تباين المجتمعين غير معلومين ومتجانسين.

في حالة تباين المجتمعين متجانس اي يكونان متساويان ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) فان معيار المختبر الاحصائي هو:

$$t_{cal} = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{(\alpha,v)}$$

حيث ان:

S_p^2 : هو التباين المجتمع (المشترك) للعينتين العشوائيتين المستقلتين وهو لـ ($S_1^2 = S_2^2$)

ويتم الحصول على (S_p^2) وفق الصيغة الاتية:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{SS_1 + SS_2}{v}$$

V: تمثل درجة الحرية. $v = n_1 + n_2 - 2$

α: تمثل مستوى المعنوية.

علماً ان:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{SS_1}{n_1 - 1}$$

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_i - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{SS_2}{n_2 - 1}$$

مثال: يشك احد متخصصي الثروة الحيوانية (مجال الحيواني) وجود فرق معنوي في طول المنقار بين نوع معين من الطيور في مجتمع الشرقي وبين المجتمع الغربي للنوع نفسه. ويأمل في استخدام هذا الفرق اذا وجد معنوياً وهو جزء من صورة التشكيلية العامة التي يقوم على اساسها تصنيف جزئي. وعليه جمعت عينة عشوائية قوامها (14) نموذجاً من المجتمع الشرقي و(18) نموذجاً من المجتمع الغربي، وتم قياس اطوال منقار كل نموذج وتم الحصول على البيانات ادناه علماً ان ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) مستوى معنوية (0.05):

$$n_1 = 14 \quad ; \quad n_2 = 18$$

$$\bar{X}_1 = 8.57 \quad ; \quad \bar{X}_2 = 8.40$$

$$\sum_{i=1}^{14} \left(X_{1i} - \bar{X}_1 \right)^2 = 2.39$$

$$\sum_{i=1}^{18} \left(X_{2i} - \bar{X}_2 \right)^2 = 2.74$$

ملاحظة:

وتكون خطوات اجراء الاختبار كما تم التعرف عليها سابقاً في اي مختبر احصائي.

Sol/

d_0: لا يوجد قيمة معينة تدل على الفرق بين المتوسطين.

1− $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad ; \quad H_0 : \mu_1 = \mu_2$

2− $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad ; \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

بما ان ($n_1, n_2 < 30$) فضلاً عن ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) وان تباين المجتمعين غير معلومين فان معيار الاختبار المناسب هو (t).

3− $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$v = n_1 + n_2 - 2 = 14 + 18 - 2 = 30$

$t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} = t_{(0.025, 30)} = 2.042$

4-

$$t_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

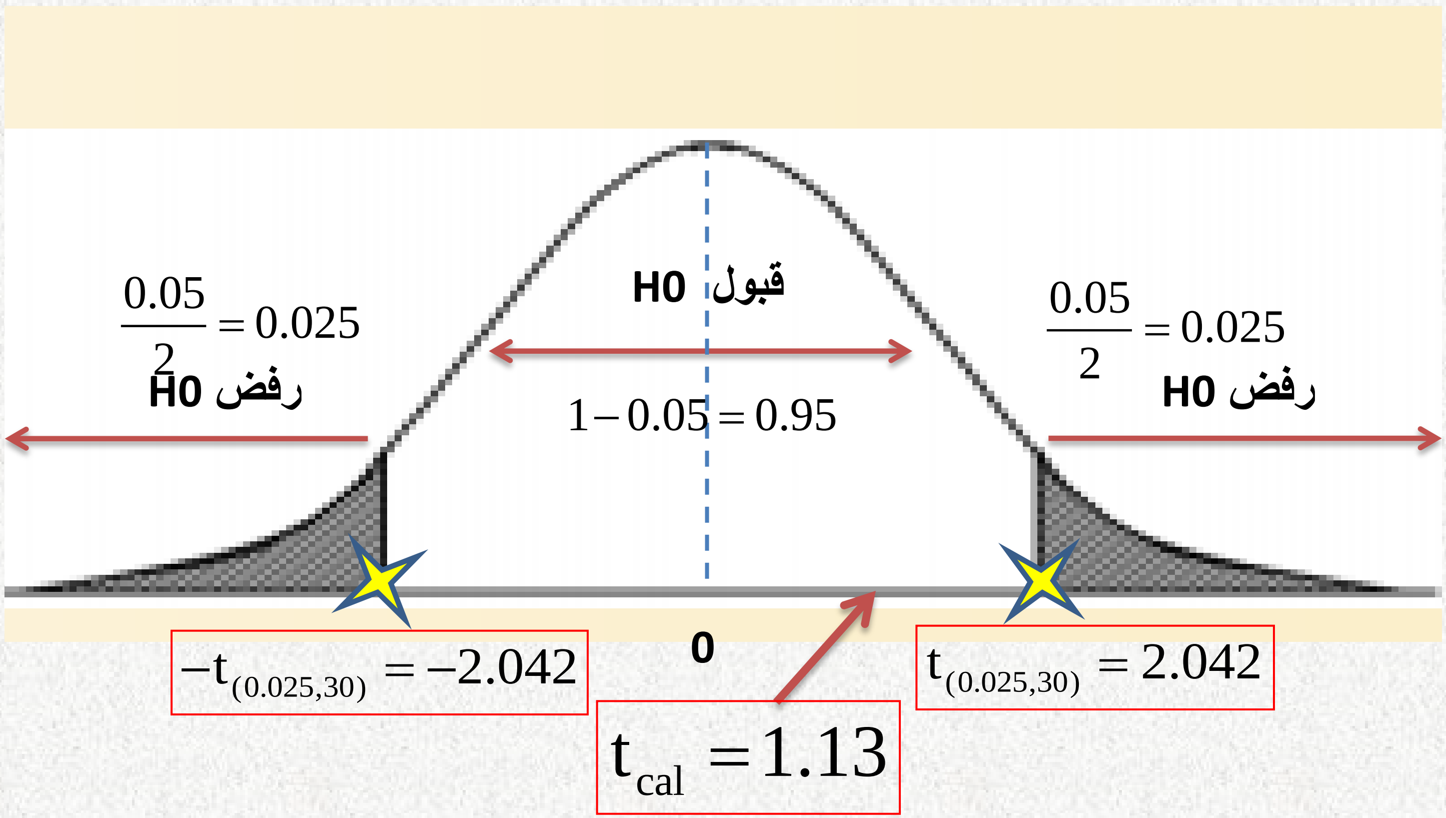
$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{2.39 + 2.74}{14 + 18 - 2}$$

$$= \frac{5.13}{30} = 0.171$$

$$\therefore t_{cal} = \frac{(8.57 - 8.40) - 0}{0.143\sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{18}}} = 1.13$$

$$\boxed{t_{cal} = 1.13}$$

5- الرسم البياني لتوضيح مناطق الرفض والقبول



6-

القرار: نلاحظ ان القيمة المحسوبة لـ t_{cal} اقل من القيمة الجدولية لـ t_{table} اي ان $(t_{table}>|t_{cal}|)$ فضلاً عن ان القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول H_0 تحت المنحنى وهذا يدل على قبول فرضية العدم H_0 ورفض الفرضية البديلة H_1، اي انه لا يوجد فرق معنوي بين اطوال منقار الطيور بين المجتمع الشرقي والمجتمع الغربي وان النوعين متشابهين بنفس طول المنقار وعلى المتخصص في هذا المجال وضع صورة عامة لتصنيف الجزئي لهذا النوع من الطيور.

مثال: في تجربة لمقارنة نسبة البروتين في صنفين من الحنطة (A,B) على توالي، تم اختيار (12) نباته من كل صنف وقُدِّرت نسبة البروتين فيهما فكانت النتائج كالاتي:

X_A	9.4	8.4	11.6	7.2	9.7	7
	10.4	8.2	6.9	12.7	7.3	9.2
X_B	12.5	9.4	11.7	11.3	9.9	8.7
	9.6	11.5	10.3	10.6	9.6	9.7

فهل يختلف الصنفان تبعاً لنسبة البروتين تحت مستوى معنوية ($\alpha = 0.05, 0.01$).

Sol/

d_0: لا يوجد قيمة معينة تدل على الفرق بين المتوسطين.

1- $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0 \quad ; \quad H_0 : \mu_A = \mu_B$

2- $H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0 \quad ; \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

بما ان ($n_1, n_2 < 30$) فضلاً عن ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) وان تباين المجتمعين غير معلومين فان معيار الاختبار المناسب هو **(t)**.

3- $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025; \quad \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$

$v = n_1 + n_2 - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$

$t_{\left(\frac{\alpha}{2}, v\right)} = t_{(0.025, 22)} = 2.074 \quad ; \quad t_{(0.005, 22)} = 2.819$

$$4-\ t_{cal} = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

صنف	n	$\bar{X}$	SS
A	12	10.4	14.08
B	12	9	38.64

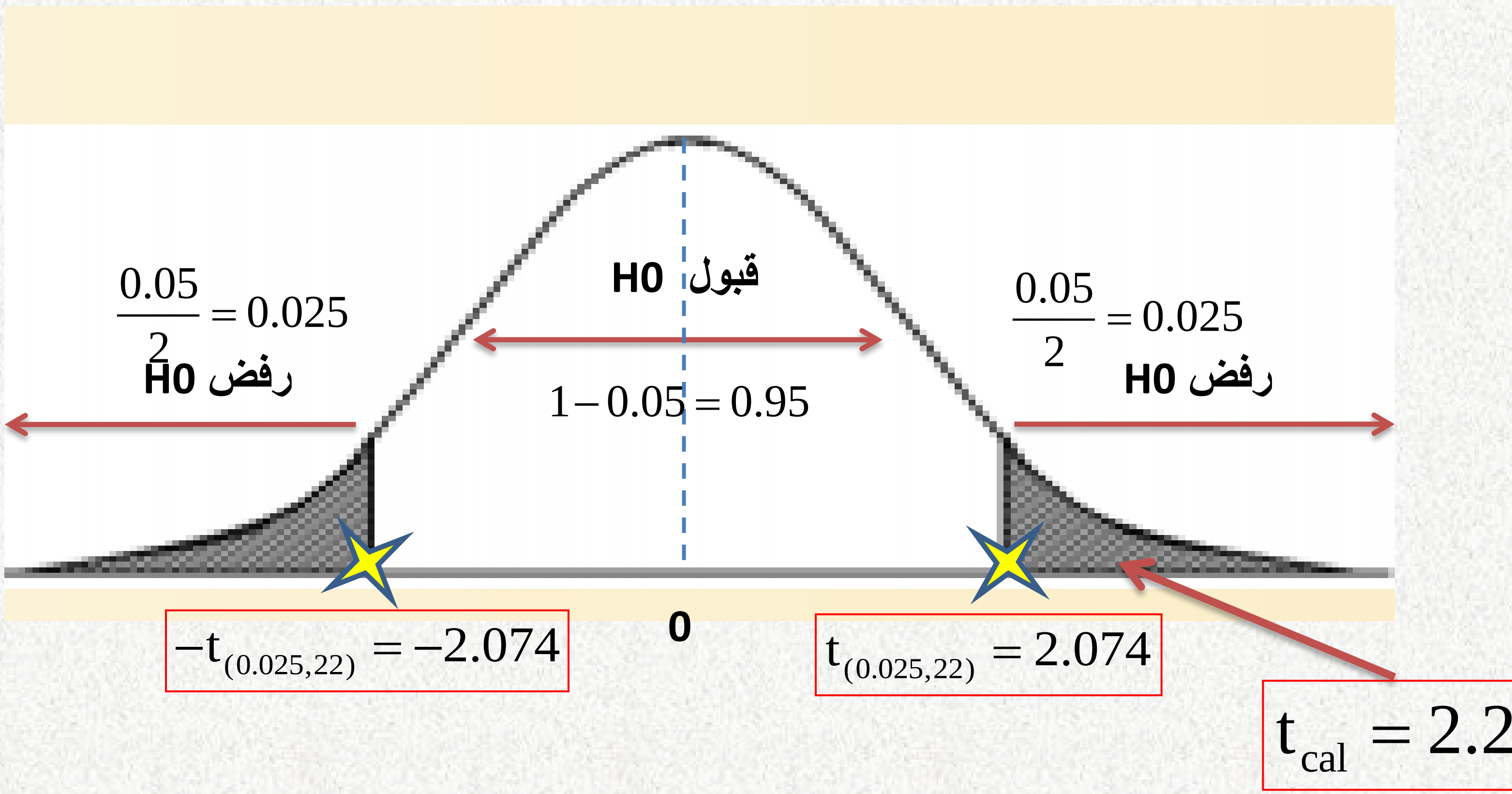
$$S_p^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{14.08 + 38.64}{12 + 12 - 2}$$

$$= 2.40\ ;\ S_p = \sqrt{2.40} = 1.183$$

$$\therefore\ t_{cal} = \frac{(10.4 - 9) - 0}{1.183\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = \frac{1.40}{0.64} = 2.2$$

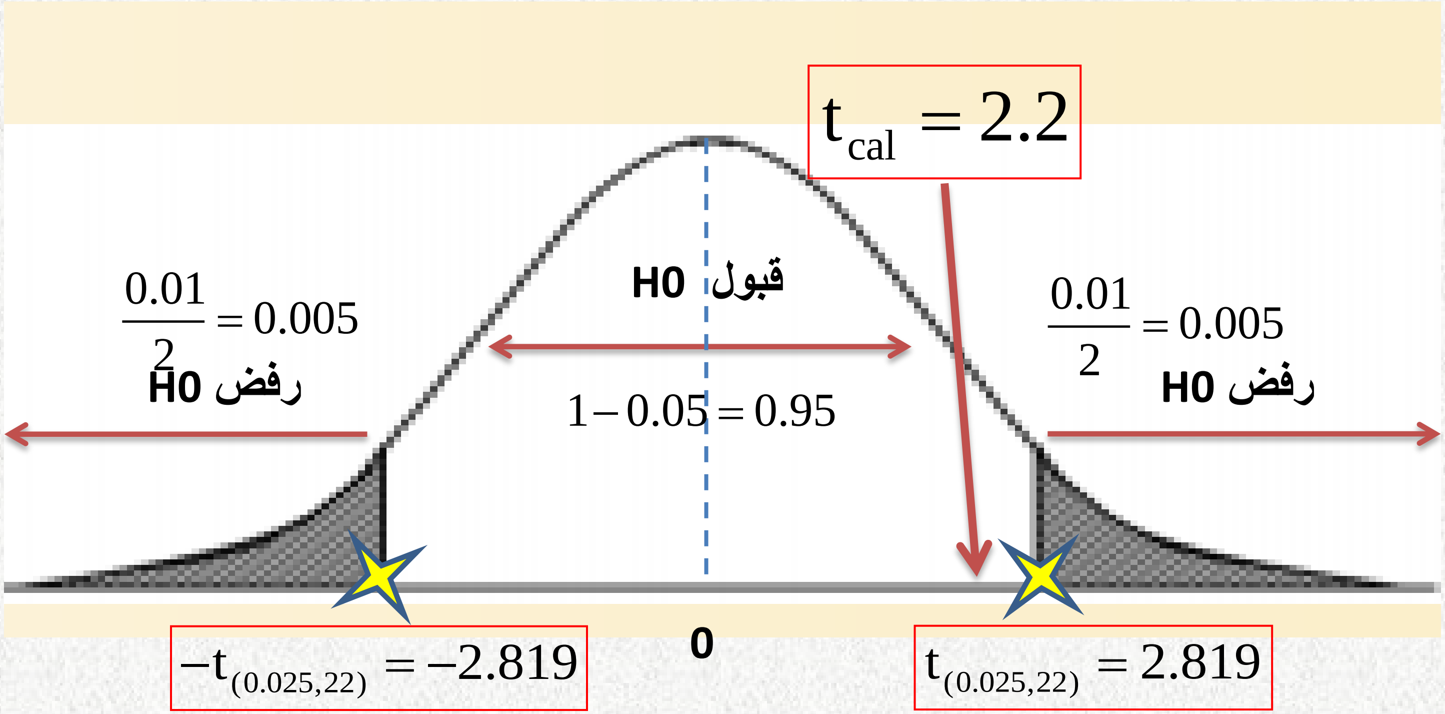
$t_{cal} = 2.2$

5- الرسم البياني لتوضيح مناطق الرفض والقبول



$$\boxed{t_{cal} = 2.2}$$

5- الرسم البياني لتوضيح مناطق الرفض والقبول



6-

القرار: نلاحظ عند مستوى معنوية (0.05) ان القيمة المحسوبة لـ t_{cal} اكبر من القيمة الجدولية لـ t_{table} اي ان $(t_{table}<|t_{cal}|)$ فضلاً عن ان القيمة المحسوبة تقع في منطقة رفض H_0 تحت المنحنى وهذا يدل على رفض فرضية العدم H_0 والقبول بالفرضية البديلة H_1، في حين نلاحظ عند مستوى معنوية (0.01) ان القيمة المحسوبة لـ t_{cal} اقل من القيمة الجدولية لـ t_{table} اي ان $(t_{table}>|t_{cal}|)$ فضلاً عن ان القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول H_0 تحت المنحنى وهذا يدل على قبول فرضية العدم H_0 ورفض الفرضية البديلة H_1. اي انه يوجد فرق معنوي بين صنفين في نسبة البروتين عند مستوى معنوية (0.05) ، ولكن عدم وجود هذا الفرق المعنوي بين صنفين في نسبة البروتين عند مستوى معنوية (0.01).

٢- تباين المجتمعين غير معلومين وغير متجانسين.

العينتين العشوائيتين في هذه حالة نسبةً للتباين المجتمعين غير متجانس اي يكونان غير متساويان ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) وان حجمهما صغيراً ($n_1, n_2 < 30$) فان معيار المختبر الاحصائي هو:

$$t_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{(\alpha,v)}; S_1^2 \neq S_2^2$$

حيث ان:

d_0 : تمثل الفرق بين متوسطي المجتمعين ($\mu_1 - \mu_2$).

V: تمثل درجة الحرية تحسب وفق الصيغة الاتية.

$$V=\frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}\cong$$

حيث ان (V) قد لا تكون عدداً صحيحاً وعندها يتم تقريب الرقم الى اقرب عدد صحيح.

مثال: تم قياس مقدار مركب الفاعلية (CH_{50}) لـ (10) اشخاص مصابين بمرض معين و(20) شخص غير مصابين بالمرض (اي طبيعيين) وبافتراض ان العينتين عشوائيتين ومستقلتين كلٌّاً منهما مسحوبان من مجتمع معين ذي توزيع طبيعي وكان تباين المجتمعين غير معلومان وغير متجانسان، اختبر الفرضية القائلة بان متوسط مركب الفاعلية لمجتمع الاشخاص الطبيعيين لهم متوسط اقل من المصابين، والجدول ادناه يوضح معلومات الاشخاص المختارين عند مستوى معنوية (0.01).

الاشخاص	n	$\bar{X}$	S
الطبيعيين	20	47.2	10.1
المصابين	10	62.6	33.8

بما ان ($n_1, n_2 < 30$) فضلاً عن ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) وان تباين المجتمعين غير معلومين فان معيار الاختبار المناسب هو **(t)**.

ملاحظة:

وتكون خطوات اجراء الاختبار كما تم التعرف عليها سابقاً في اي مختبر احصائي.

Sol/ d_0: لا يوجد قيمة معينة تدل على الفرق بين المتوسطين.

1- $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad ; \quad H_0: \mu_1 = \mu_2$

2- $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad ; \quad H_1: \mu_1 < \mu_2$

3-
$$V = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{14243.11}{1451.19} = 9.81 \cong 10$$

$\alpha = 0.01 \; ; \quad t_{(\alpha, v)} = t_{(0.01, 10)} = 2.764$

4−

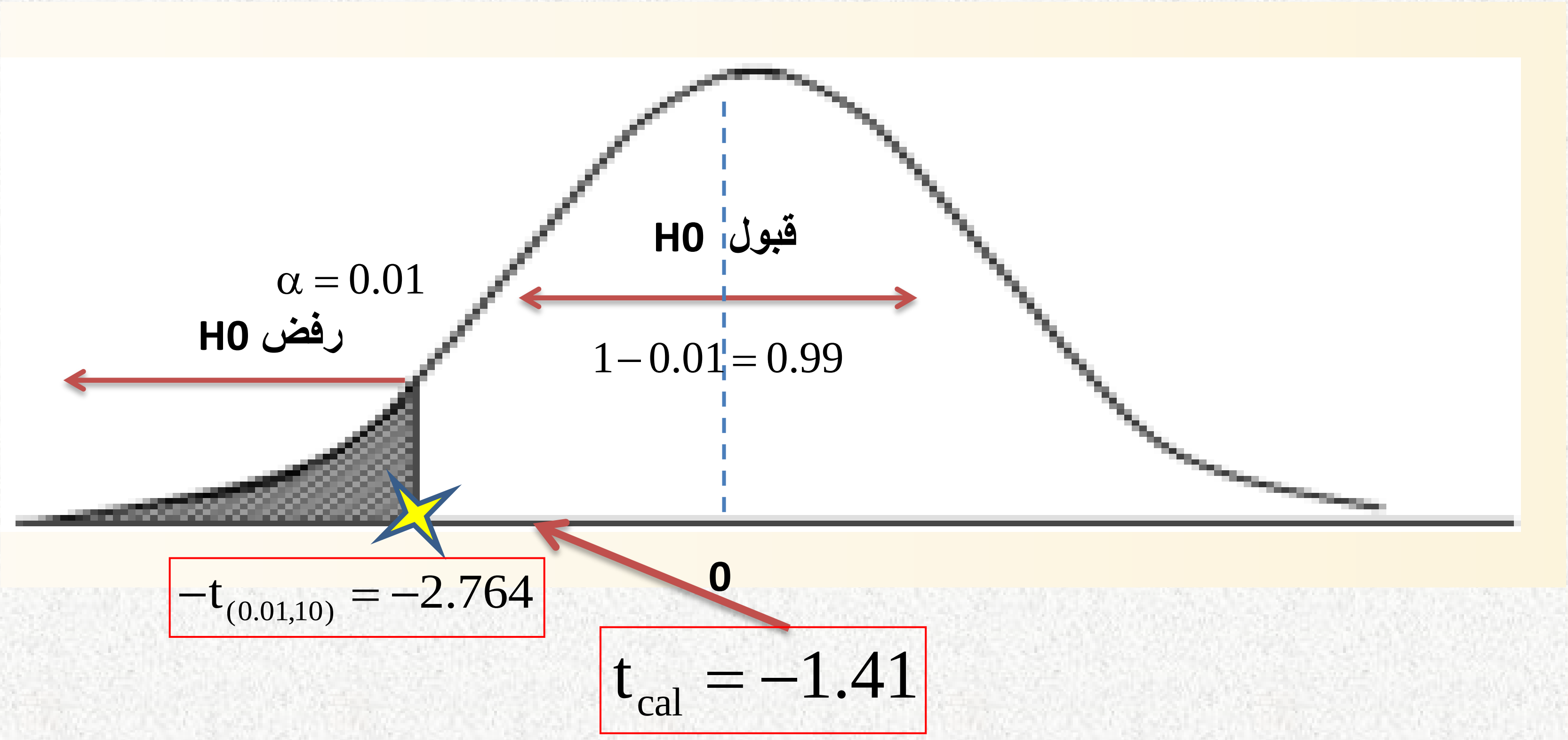
$$t_{cal} = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{\left(47.2 - 62.1\right) - 0}{\sqrt{\frac{(10.1)^2}{20} + \frac{(33.8)^2}{10}}} = \frac{-15.4}{10.924}$$

$$\therefore t_{cal} = -1.41$$

$$t_{cal} = -1.41$$

5- الرسم البياني لتوضيح مناطق الرفض والقبول



6-

القرار: نلاحظ ان القيمة المحسوبة لـ t_{cal} اقل من القيمة الجدولية لـ t_{table} اي ان $(t_{table}>|t_{cal}|)$ فضلاً عن ان القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول H_0 تحت المنحنى وهذا يدل على قبول فرضية العدم H_0 ورفض الفرضية البديلة H_1، اي انه لا يوجد فرق معنوي بين الاشخاص الطبيعيين والمصابين اي ان مركب الفاعلية لـ (CH_{50}) متساويين بينهما.

ملاحظة مهمة: نلاحظ ان جميع ما ذكر من معطيات كانت في حالة وسطين حسابيين مستقلين اي غير مرتبطين.