Lecture -9-

4-12: The probability density function of continuous random variable:

دالة كثافة الاحتمال p.d.f. للمتغير العشوائي المستمر.

Definition:

The p.d.f. of continuous r.v. X is a function f which the property that the area under the curve of this function corresponding to any interval is equal to the probability that X will have a value in this interval

دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي المستمر X هي الدالة f التي تحقق خاصية تحت المنحنى لهذه الدالة المناظرة لأي فترة تساوي احتمال ان x لها قيمة ضمن هذه الفترة.

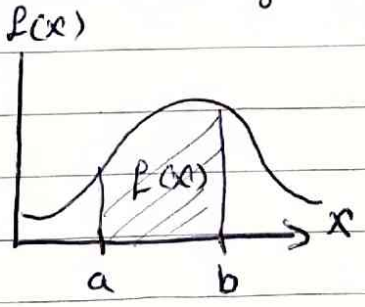
Properties of p.d.f. of continuous r.v.:

خصائص دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي المستمر

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3) For any interval (a, b) then the area of represe in the following diagram:



Remarks:

1) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

اي يمكن ان وجود علامة المساواة مع اي علامة متغيرة ضمن الفترة ليس لها تاثير في حالة المتغير المستمر، بينما في المتغير المتقطع فان علامة المساواة لها تاثير.

2) $P(X=a) = 0$ لانه لايوجد مساحة عند نقطة واحدة
فانه لا احتمال في حالة المتغير المستمر لاي نقطة (اي قيمة تساوي الصفر)

3) $P(X<a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

4) $P(X>a) = P(X \geq a) = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$

5) $P(X>a) = 1 - P(X \leq a)$
$P(X<a) = 1 - P(X \geq a)$
$P(X \leq a) = 1 - P(X>a)$
} هذه الاحتمالات تطبق في حالة المتقطع والمستمر

EX: (1)
Let the r.v. X have the function $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

① Is $f(x)$ P.d.f. ?
② Find ① $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4})$ ② $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$
③ $P(X \leq 0.3)$ ④ $P(X > 0.3)$

Sol.:
① لمعرفة هل ان الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمال (P.d.f.) يجب التحقق من خاصيتها واهمها

$$\int_{\forall x} f(x)\,dx = 1$$

وبما ان فترة X هي $0<x<1$ فيجب تكامل الدالة لكل فترة X المعطاة فلو كانت النتيجة = 1 فانه الدالة $f(x)$ هي P.d.f. اي دالة كثافة احتمال.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 2x\,dx = 1$$

$$\frac{2x^2}{2}\Big]_0^1 = x^2\Big]_0^1$$

$$\Rightarrow x^2\Big]_0^1 = 1^2 - 0 = 1$$

$$\therefore \int_{\forall x} f(x)\,dx = 1$$

اثبتنا ان تكامل الدالة $f(x)$ لكل قيم x يساوي الواحد وهذا يدل على ان الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمال اي P.d.f

② // $P(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4})$

لايجاد هذا الاحتمال وهو احتمال ان x تاخذ قيم محصورة بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ سوف ناخذ التكامل للدالة $f(x)$ وتكون حدود التكامل تمثل $\frac{1}{2}$ كما بالاول و $\frac{3}{4}$ كما بالاعلى. [نستخدم التكامل لايجاد هذا الاحتمال لان x متغير عشوائي متصل (مستمر)]

$$P(\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x\,dx$$

$$= \frac{2x^2}{2}\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \left[\frac{3}{4}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{9-4}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P(\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{3}{4}) = \frac{5}{16}$$

② // $P(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x\,dx$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2x\,dx$$

جزئنا الفترة $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ الى فترتين لان $-\frac{1}{2}$ ليس من ضمن الفترة الاصلية لـ x والتي هي $0 < x < 1$ اي ان من $-\frac{1}{2}$ الى الصفر تكون خارج الفترة الاصلية لـ x.

$$\therefore P(-\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}) = 0 + \frac{2x^2}{2}\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0 = \frac{1}{4}$$

↑ قيمة التكامل الاول لان الفترة $(-\frac{1}{2}, 0)$ هي خارج فترة x الاصلية و ان اي احتمال لقيم خارج الفترة الاصلية = صفر

3// $P(X \leq 0.3) = \int_0^{0.3} f(x)\,dx = \int_0^{0.3} 2x\,dx = \frac{2x^2}{2}\Big]_0^{0.3}$

حيث اكبر الحدود التكامل بـ صفر لان الاحتمال المطلوب هو اقل
او يساوي 0.3 وان اقل قيمة لـ X حسب الفترة المعطية هي 0.

$P(X \leq 0.3) = (0.3)^2 - 0 = 0.09$

4// $P(X > 0.3)$ هذا الاحتمال يمثل ان X اكبر من 0.3 وهذا
يمثل ان اكبر الحدود لقيمة X هنا هي 0.3 واكبر الاعلى غير محدد
ويمكن تحديده من فترة X المعطية وهو (1) اي ان هذا الاحتمال
يمكن ايجاده كالاتي

$P(X > 0.3) = \int_{0.3}^{1} f(x)\,dx = \int_{0.3}^{1} 2x\,dx = \frac{2x^2}{2}\Big]_{0.3}^{1}$

$P(X > 0.3) = 1^2 - (0.3)^2 = 1 - 0.09 = 0.91$

كما يمكن ايجاد هذا الاحتمال بالاعتماد على نتيجة المطلوب (3)
السابقة وكالاتي

$P(X > 0.3) = 1 - P(X \leq 0.3)$
$= 1 - 0.09 = 0.91$

4.13: Cumulative distribution function: دالة التوزيع التراكمية

The cumulative distribution function of continuous r.v. X is denoted by $F(X)$ and is defined by

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي المستمر X يرمز لها بالرمز $F(X)$ وتعرف بـ:

$$F(X) = P(X \leq X) = \int_{-\infty}^{X} f(t)\,dt$$

$f(t)$ هي دالة كثافة احتمال
المتغير العشوائي X ولكن بدلت X بـ t لان اكبر الاعلى للتكامل رمزنا له
بـ X اي فقط لكي نفرق بين X بعد التعويض عنها في نتيجة التكامل.

⊛ Properties of C.d.f.: خصائص دالة التوزيع التراكمية c.d.f

1) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

2) $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

3) $F(x_1) \leq F(x_2)$ if $x_1 < x_2$

4) $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

EX: (2)

Find $F(x)$ for previous example.

اوجد $F(x)$ للمثال السابق

$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$

⊛ $f(x)$ تمثل الكثافة $f(t)$ فقط كمتغيرة لابد ان نفرق عندما نعوض نهاية x بعد التكامل

$$\therefore F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt = t^2 \Big]_0^x = x^2 - 0 = x^2$$

$$\therefore F(x) = x^2$$

⊛ The relationship between $f(x)$ and $F(x)$: العلاقة بين $f(x)$ و $F(x)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

هذه العلاقة هي ان دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي X يمكن ايجادها من ايجاد المشتقة الاولى للدالة التراكمية $F(x)$ بالنسبة لـ x

EX: (3)

Let

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Find the p.d.f. of r.v. X.

Sol.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx}$$

$$\therefore \boxed{f(x) = 2x}$$

EX: (4)

Suppose that X is a continuous r.v. whose p.d.f. is given by: اذا كان X متغير عشوائي مستمر وله دالة كثافة احتمال هي:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

Find:

① The value of the constant C.

② $P(X > 1)$ ③ $P(X > 0)$ ④ $P(-1 < X \leq 1)$ ⑤ $F(X)$

Sol.:

∵ $f(x)$ is p.d.f. then ∵ $f(x)$ هي دالة كثافة احتمال فان

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

تكتب حدود التكامل بصورة عامة من $-\infty$ الى ∞ وعند التطبيق على المثال تذكر حدود المتغير x

$$\Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{0}^{2} C(4x - 2x^2)\,dx = 1$$

$$\int_{0}^{2} 4Cx\,dx - \int_{0}^{2} 2Cx^2\,dx = 1$$

$$\frac{4C}{2}x^2\Big]_0^2 - \frac{2C}{3}x^3\Big]_0^2 = 1$$

$$[2C(2^2) - 0] - \left[\frac{2C}{3}(2^3) - 0\right] = 1$$

$$8C - \frac{16C}{3} = 1$$

$$\frac{24C - 16C}{3} = 1$$

$$\frac{8C}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{3}{8}}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{8}(4x - 2x^2) = \frac{12x - 6x^2}{8}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{12x - 6x^2}{8} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{O.W.} \end{cases}$$