Inverse and Sensitivity analysis

Example: Consider the Lpp:

$$\begin{aligned} Min \quad & z = 2x_1 - x_2 \\ s.t. \quad & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 - x_2 = 2 \end{aligned}$$

1. Find x_1 and x_2 and . z

2. If b_1 changed by $\Delta b_1 = 1$ and b_2 changed by $\Delta b_2 = 1$. Find the new $\bar{x}_1$ and $\bar{x}_2$ and $\bar{z}$.

Solution:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow B_{ij} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

1.

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} B_{ij} b_j \quad ; \quad i = 1, 2, 3, ..., m$$

$$\begin{aligned} x_1 = \sum_{j=1}^{m=2} B_{1j} b_j &= B_{11} b_1 + B_{12} b_2 \\ &= (1/3)(5) + (2/3)(2) = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \\ &= 9/3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = \sum_{j=1}^{m=2} B_{2j} b_j &= B_{21} b_1 + B_{22} b_2 \\ &= (1/3)(5) + (-1/3)(2) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \\ &= 3/3 = 1 \end{aligned}$$

$z = -\sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i$ π_i ما هي قيم

$$\pi_i = -\sum_{j=1}^{m} B_{ji}\, c_j$$

$$\pi_1 = -\sum_{j=1}^{m=2} B_{j1}\, c_j = -\left[B_{11}\, c_1 + B_{21}\, c_2\right]$$

$$= -\left[1/3(2) + 1/3(-1)\right] = -\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3}$$

$$\pi_2 = -\sum_{j=1}^{m=2} B_{j2}\, c_j = -\left[B_{12}\, c_1 + B_{22}\, c_2\right]$$

$$= -\left[2/3(2) + (-1/3)(-1)\right] = -\left[\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= -\left[\frac{5}{3}\right] = -\frac{5}{3}$$

أو باستخدام طريقة المضروب

$$z = -\sum_{i=1}^{m=2} b_i\, \pi_i = -\left[b_1\, \pi_1 + b_2\, \pi_2\right]$$

$$= -\left[5\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\left(-\frac{5}{3}\right)\right]$$

$$= -\left[-\frac{5}{3} - \frac{10}{3}\right]$$

$$= -\left[-\frac{15}{3}\right] = \frac{15}{3} = 5$$

2.

لإيجاد $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ يجب أن نجد Δx_1 و Δx_2 لان :

$$\bar{x}_1 = x_1 + \Delta x_1 \quad , \quad \bar{x}_2 = x_2 + \Delta x_2$$

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \Delta b_j \quad ; \; j = 1,2,\cdots,m$$

$$\Delta x_1 = \sum_{j=1}^{\infty} B_{1j} \Delta b_j = \left[B_{11} \Delta b_1 + B_{12} \Delta b_2 \right]$$

$$= \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(1)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Delta x_2 = \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j} \Delta b_j = \left[B_{21} \Delta b_1 + B_{22} \Delta b_2 \right]$$

$$= \frac{1}{3}(1) + (-\frac{1}{3})(1)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \quad = \quad 0$$

$$\overline{x_1} = x_1 + \Lambda x_1 = 3 + 1 = 4$$

$$\overline{x_2} = x_2 + \Lambda x_2 = 1 + 0 = 1$$

$$\because \quad Z = 2x_1 - x_2$$

$$2\overline{x_1} - \overline{x_2} =$$

$$2(4) - (1) = 8 - 1 = 7$$

أو

$$\Delta Z = -\sum_{i=1}^{m} \pi_i \Delta b_i = -[\pi_1 \Delta b_1 + \pi_2 \Delta b_2]$$

$$= -\left[-\frac{1}{3}(1) + (-\frac{5}{3})(1) \right] = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\overline{Z} = Z + \Delta Z$$

$$= 5 + 2 = 7$$

أما اذا كان التغير في c_j

$\Delta c_1 = 2$, $\Delta c_2 = 0$

1) نجد a_{ij}.

2) نجد معكوس لـ a_{ij} أي أن B_{ij}.

3) نجد قيم x_i وذلك باستخدام $x_i = \sum_{j=1}^{m} B_{ij} b_j$ $\therefore x_1 = 3$ و $x_2 = 1$

4) نجد قيم z باستخدام $z = -\sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i$ أو نعوض x_1 و x_2 في دالة الهدف أي z ونحصل على قيمة z.

$$\Delta z = \sum_{j=1}^{m} x_j \Delta c_j = [x_1 \Delta c_1 + x_2 \Delta c_2]$$

$$= [(3)(2) + (1)(0)]$$

$$= 6 + 0 = 6$$

$$\overline{z} = z + \Delta z = 5 + 6 = 11$$

أو

$$\overline{z} = (c_1 + \Delta c_1) x_1 + (c_2 + \Delta c_2) x_2$$

$$= (2+2) x_1 + (-1+0) x_2$$

$$= 4 x_1 - x_2$$

$$= 4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$$

Excersice:

1)

$$Min\ z = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3$$
$$s.t.\quad x_1 + \frac{x_2}{2} + 3/2\,x_3 \geq 5$$
$$x_2 + 2x_3 \geq 7$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- ملاحظات بالنسبة للمسألة 1:

1- جد الحل الأمثل للمسألة.

2- أذا كان $\Delta b_1 = 1, \Delta b_2 = -1$ ، هل للمسألة حل؟ ما هي؟

3- أذا كانت $\Delta c_1 = 7, \Delta c_2 = 3$ ، جد الحل الأمثل الجديد.

2)

$$Min\ z = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$s.t.\quad x_1/2 + 2x_2 + 2x_3 \geq 40$$
$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 150$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- ملاحظات بالنسبة للمسألة 2:

1- جد الحل الأمثل للمسألة.

2- أذا كانت $\Delta c_1 = 1, \Delta c_2 = 2, \Delta c_3 = -1$ ، جد الحل الأمثل الجديد.

***ملحوضة :**

1) أذا كانت عدد المعادلات = عدد المتغيرات فهنالك حل وحيد للمسألة.

2) أذا ما حدث خلل في هذه المعادلة نبحث عندئذ عن المتغيرات الاساسية فقط وذلك بمساعدة مضروب simplex.