نظرية : في المعاينة العشوائية الطبقية لنسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة ، اثبت ان :

$$E[p_h] = P_h \quad , \quad \text{and} \quad E[p_{st}] = P$$

Proof :

$$1 - \because P_h = \bar{Y}_h = \frac{\sum_{h=1}^{N_h} Y_{hi}}{N_h} \quad , \quad Y_{hi} = 0,1$$

$$\because p_h = \bar{y}_h = \frac{\sum_{h=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h} \quad , \quad y_{hi} = 0,1$$

$$\because E[p_h] = E[\bar{y}_h] = \frac{\sum_{h=1}^{n_h} E[y_{hi}]}{n_h} = \frac{\sum_{h=1}^{n_h} \bar{Y}_h}{n_h} = \frac{(n_h)(\bar{Y}_h)}{n_h} = \bar{Y}_h$$

$$\because E[p_h] = \bar{Y}_h = P_h$$

$$2 - \because p_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h p_h}{N} \Rightarrow E[p_{st}] = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h E[p_h]}{N} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h P_h}{N} = P$$

نظرية : اثبت ان

$$V[p_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{P_h Q_h}{n_h} \frac{(N_h - n_h)}{(N_h - 1)}$$

Proof:

$$\because Y_{hi} = 0,1$$

$$\because \sigma^2_{(y)} = [\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} Y_i)^2}{N}]/(N-1) \Rightarrow \sigma^2_{(p)} = \frac{NPQ}{N-1}$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{(ph)} = \frac{N_h P_h Q_h}{N_h - 1}$$

$$\because V[\bar{y}_{st}] = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} \frac{\sigma^2_{(Ph)}}{n_h}$$

$$\because V[p_{st}] = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} \frac{(N_h P_h Q_h)}{(N_h - 1) n_h}$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(N_h - n_h)(P_h Q_h)}{(N_h - 1) n_h}$$

كذلك بنفس الطريقة يمكننا اثبات ان :

$$\because S^2[p_{st}] = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(N_h - n_h)(p_h q_h)}{N_h n_h (n_h - 1)}$$

نظرية: في المعاينة العشوائية الطبقية اثبت ان تباين نسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة ، في التوزيع المتناسب يكون بالصيغة الاتية :

$$V_{Prop.}[p_{st}] = \frac{1-f}{n} \sum_{h=1}^{L} W_h P_h Q_h$$

$$when \quad n_h = W_h n \ , \ N_h - 1 = N_h \ , f_h = f$$

Proof :

$$\because V[p_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{P_h \ Q_h}{n_h} \frac{N_h (1 - f_h)}{(N_h - 1)}$$

$$\because n_h = W_h n \ , \ N_h - 1 = N_h \ , f_h = f$$

$$\therefore V[p_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{P_h \ Q_h}{W_h n} \frac{N_h (1-f)}{N_h} = \frac{(1-f)}{n} \sum_{h=1}^{L} W_h P_h \ Q_h$$

نظرية: في المعاينة العشوائية الطبقية اثبت ان تباين نسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة ، في التوزيع الامثل يكون بالصيغة الاتية :

$$V[p_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h P_h Q_h}{\sqrt{N_h P_h Q_h} \Big/ \sqrt{N_h - 1} \sqrt{C_h}} \frac{(N_h - n_h)}{(N_h - 1)} \Bigg/ \sum_{h=1}^{L} W_h \sqrt{N_h P_h Q_h} \Big/ \sqrt{N_h - 1} \sqrt{C_h} \ n$$

Proof:

$$\because V[p_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \ P_h Q_h}{n_h} \frac{(N_h - n_h)}{(N_h - 1)}$$

$$\because n_h = \frac{W_h \sigma_h \Big/ \sqrt{C_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h \Big/ \sqrt{C_h}} n \quad , \quad \because \sigma_{(p)}^2 = \sigma_{(p_h)}^2 = \frac{N_h \ P_h \ Q_h}{N_h - 1}$$

$$\because n_h = \frac{W_h \sqrt{\frac{N_h P_h Q_h}{N_h - 1}} \Big/ \sqrt{C_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h \sqrt{\frac{N_h P_h Q_h}{N_h - 1}} \Big/ \sqrt{C_h}} n$$

$$\therefore V[p_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 P_h Q_h}{\frac{W_h \sqrt{N_h P_h Q_h}}{\sqrt{N_h - 1}\sqrt{C_h}}} \frac{(N_h - n_h)}{(N_h - 1)} \Big/ \sum_{h=1}^{L} W_h \sqrt{N_h P_h Q_h} \Big/ \sqrt{N_h - 1}\sqrt{C_h} \, n$$

$$V[p_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h P_h Q_h}{\frac{\sqrt{N_h P_h Q_h}}{\sqrt{N_h - 1}\sqrt{C_h}}} \frac{(N_h - n_h)}{(N_h - 1)} \Big/ \sum_{h=1}^{L} W_h \sqrt{N_h P_h Q_h} \Big/ \sqrt{N_h - 1}\sqrt{C_h} \, n$$

نظرية : بين انه في المعاينة العشوائية الطبقية لنسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة تكافئ العلاقة الاتية :

$$V[_{Ran.}(p)] \geq V[_{Prop.}(pst)] \geq V[_{New.}(pst)]$$

وكما يلي :

$$1 - V[_{Ran.}(p)] = V[_{Prop.}(pst)] + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h (P_h - P)}{n}$$

$$2 - V[_{Prop.}(pst)] = V[_{New.}(pst)] + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h (\sqrt{P_h Q_h} - \sqrt{\overline{P}_h \overline{Q}_h})}{n}$$

$$\text{where } \sqrt{\overline{P}_h \overline{Q}_h} = \sum_{h=1}^{L} W_h \sqrt{P_h Q_h} \quad , \quad N_h - 1 = N_h \quad , f_h = f = 0$$

Proof (1) :

$$\because y_i = 0,1 \Rightarrow \bar{y} = p \Rightarrow V_{Ran.}(\bar{y}) = V_{Ran.}(p)$$

$$\because y_{hi} = 0,1 \Rightarrow \bar{y}_{st} = p_{st} \Rightarrow V_{Prop.}(\bar{y}_{st}) = V_{Prop.}(p_{st})$$

$$\because V_{Ran.}(\bar{y}) = V_{Prop.}(\bar{y}) + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{L} W_h(\bar{Y}_h - \bar{Y})^2$$

$$\because \bar{Y} = P \quad , \quad \bar{Y}_h = P_h$$

$$\therefore V_{Ran.}(p) = V_{Prop.}(p_{st}) + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{L} W_h(P_h - P)^2$$

Proof (2) :

$$\because V_{Prop.}(\bar{y}) = V_{Ney.}(\bar{y}) + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{L} W_h(\sigma_h - \bar{\sigma})^2$$

$$\because \bar{\sigma} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h}{N} \quad , \quad \text{and} \quad \sigma_h^2 = \frac{N_h P_h Q_h}{N_h - 1}$$

$$\because N_h - 1 = N_h \Rightarrow \sigma_h^2 = \frac{N_h P_h Q_h}{N_h - 1} = P_h Q_h$$

$$\because \bar{\sigma} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \sqrt{P_h Q_h}}{N} = \sum_{h=1}^{L} W_h \sqrt{P_h Q_h} = \sqrt{\bar{P}_h \bar{Q}_h}$$

$$\therefore V[_{Prop.}(pst)] = V[_{New.}(pst)] + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h(\sqrt{P_h Q_h} - \sqrt{\bar{P}_h \bar{Q}_h})}{n}$$