مثال (1):

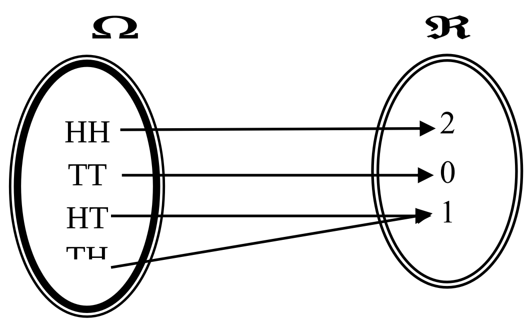
في تجربة رمي قطعتي نقود سوية نجد أن فضاء العينة (الحالات الكلية الممكنة) هو:

$$\Omega = \{HH, TT, HT, TH\}$$

ولو فرضنا أن المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الصور التي ستظهر بعد رمي القطعتين فان:

$$X(HH) = 2 \;,\; X(HT) \text{ or } X(TH) = 1 \;,\; X(TT) = 0$$

أي من الممكن أن نحصل على صورتين أو على صورة واحدة أو لا نحصل على أي صورة، ويمكن تمثيلها بالرسم الآتي :



ولغرض توضيح معنى اقتران كل قيمة من القيم أعلاه بقيمة احتمالية، فمثلاً نجد أن احتمال الحصول على صورتين هو:

$$P_r(X = 2) = \frac{1}{4}$$

كذلك احتمال الحصول على صورة واحدة هو:

$$P_r(X = 1) = \frac{2}{4}$$

ملاحظة: الرمز (P_r) هو مختصر لكلمة (Probability) وتعني احتمالية.

وبما أن نتائج التجربة غير معروفة مسبقاً (إلا بعد وقوعها) فان المتغير الناتج عنها هو متغير عشوائي .

- **أقسام المتغيرات العشوائية :**

المتغيرات العشوائية النوعية (الوصفية) : Qualitative Random Variable

وهي المتغيرات التي لا يمكن قياسها بوحدات القياس المعروفة وإنما تشكل صفات لذلك المتغير وكأمثلة على ذلك (لون البشرة ، الحالة الاجتماعية ، الجنس ، الدرجة الوظيفية ،المرتبة العسكرية ....الخ) وتنقسم هذه المتغيرات بدورها إلى:

1−متغيرات عشوائية نوعية اسمية: Nominal Qualitative Random Variable

وتتمثل بالمتغيرات التي ليس لصفاتها أي وزن ، أي تتميز بعدم جدوى ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً فمثلا متغير الجنس لافرق إذا قلنا ذكر وأنثى أو أنثى وذكر ؛ وكذلك الوسيلة المستخدمة لنقل البضائع فقد تكون الطائرة أو الشاحنة أو الباخرة أو أي وسيلة أخرى ؛ وسيلة الدعاية فقد تكون الجريدة أو التلفزيون أو المذياع أو الانترنيت أو أي وسيلة أخرى ؛ ... الخ .

2−متغيرات عشوائية نوعية ترتيبية: Ordinal Qualitative Random Variable

وهي المتغيرات التي يمكن ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يمكن إعطاء وزن لكل صفة من صفاتها وكمثال على ذلك مستوى طالب معين فقد يكون ضعيف أو متوسط أو جيد أو غيرها ؛ حجم شيء معين فقد يكون كبير أو وسط أو صغير ؛ الدرجة الوظيفية فقد يكون أستاذ ، أستاذ مساعد ، مدرس ، مدرس مساعد ، ...الخ .

● المتغيرات العشوائية الكمية : Quantitative Random Variable

وهي المتغيرات التي يمكن قياسها بوحدات القياس المعروفة كالعدد ، الطول ، الوزن ،الارتفاع ، السعر ،....الخ , كعدد المصابيح المنتجة في مصنع معين ، أطوال مجموعة من الأشخاص، أسعار الوقود طيلة أشهر السنة ،أوزان شحنات القمح المستوردة خلال العشر سنوات الماضية ..الخ . وتنقسم هذه المتغيرات أيضاً إلى قسمين هما :

1− متغيرات عشوائية كمية متقطعة Quantitative Discrete Random Variable

إذا كان فضاء العينة (Ω) مجموعة قابلة للعد سواء أكانت منتهية أو غير منتهية فانه يسمى فضاءً متقطعاً (منفصلاً) والمتغير العشوائي المعرف على هذا الفضاء يسمى متغيراً عشوائياً متقطعاً ويأخذ قيماً صحيحة خالية من الكسور ومن الأمثلة :

- عدد الأطفال في الأسرة .
- عدد الأخطاء المطبعية في صفحات كتاب ما .
- عدد النداءات الهاتفية المستقبلة من قبل بدالة هاتف خلال فترة زمنية معينة .
- عدد القيم الممكنة في تجربة رمي زهرة نرد .
- عدد الأسهم التي تمتلكها شركة مساهمة .

2− متغيرات عشوائية كمية متصلة : Quantitative Continuous Random Variable

إذا كان فضاء العينة مجموعة غير قابلة للعد سواء أكانت منتهية أو غير منتهية فانه يسمى فضاءً متصلاً والمتغير العشوائي المعرف على هذا الفضاء يسمى متغيراً عشوائياً متصلاً (مستمراً) أي أن المتغير العشوائي

المتصل يأخذ حيزاً أو مجالاً معيناً على خط الأعداد الحقيقية . أو يمكننا القول باختصار بأن كل متغير يمكن أن تكون اي قيمة من قيمه كسراً عشرياً فهو متغير متصل. ومن الأمثلة على هذا النوع من المتغيرات :

- ❖ حجم الغازات المنبعثة من انفجار بركاني محتمل الوقوع .
- ❖ الطول ، الوزن ، العمر ، الضغط ، الڤولتية ، الكمية (كأطوال طلبة العراق ، وزن علب الحليب المنتجة في معمل معين ، أعمار مجموعة من الطلاب ، ضغط الغاز داخل اسطوانات الغاز السائل ، ڤولتية بطاريات السيارات المختلفة ، كمية الأمطار الساقطة في فصل معين)
- ❖ درجة حرارة مياه البحر في فصل معين .
- ❖ سعر السهم في البورصة .
- ❖ سنوات الخدمة .

كما أن هذا النوع من المتغيرات يمكن وضعه في صنفين هما:

أ- متغير عشوائي متصل فئوي : Continuous Interval Random Variable

وتعرف بأنها تلك المتغيرات التي يمكن إجراء العمليات الحسابية على قيمها دون أن تتأثر المسافة النسبية بين قيمها ويتميز هذا النوع من المتغيرات من خلال القيمة (صفر) والتي *لا تعني* قيمة الصفر عدم توفر الصفة فمثلاً عندما نقول أن احمد قد حصل على درجة صفر في امتحان الرياضيات فهذا *لا يعني* أن احمد لا يعلم شيئاً عن الرياضيات ، وإذا قلنا أن درجة حرارة الجو هي صفر فهذا *لا يعني* عدم وجود درجة حرارة .

ب- متغير عشوائي متصل نسبي : Continuous Ratio Random Variable

وهي تشبه إلى حد كبير المتغيرات الفئوية إلا أن الفرق الوحيد هو أن الصفر فيها يصف عدم توفر الصفة أي أنها تعطي (المعنى الحقيقي للصفر). فمثلاً عندما نقول أن المسافة تساوي صفر فهذا يعني عدم وجود مسافة، وإذا قلنا أن الزمن صفر فهذا يعني أن لازمن هناك.

الاحتمالات : Probability

لأجل فهم معنى الاحتمال وكيفية حسابه لابد من ذكر بعض المفاهيم الخاصة في هذا الموضوع ومنها (التجربة العشوائية ، الحدث ، الاحتمال) وكالاتي :

التجربة العشوائية والحدث :

وهي التجربة التي لا يمكن تحديد نتائجها بدقة سلفاً ويتم الاعتماد على مبدأ الاحتمال في تحديد نتائج التجربة العشوائية (وبعبارة أخرى فان التجربة هي كل عملية تعطي مشاهدة أو قياساً لظاهرة معينة) وان كل نقطة أو نتيجة في التجربة العشوائية تسمى حدثاً (Event)حيث أن أي مجموعة معرفة في (Ω) تسمى حدثاً وكأمثلة على التجربة العشوائية وحوادثها :-

مثال : عملية فحص صندوق فيه (100) مصباح تسمى تجربة وان النتائج التي تتمثل بالحالات (معيب ، صالح ، صالح ، ...، معيب ، صالح) تسمى بالحوادث وهذا النوع من الحوادث في هذا المثال يدعى بالحوادث البسيطة وسميت كذلك لان أي نتيجة فيها لايمكن تجزئتها إلى نتيجتين أو أكثر فمثلاً إحدى النتائج ولتكن (صالح) نرى بأنه لايمكن تجزئتها إلى جزئين أو أكثر .

مثال : تجربة رمي قطعتي نقود ســوية فأن الحوادث هي (**HH,TT,TH,HT**) وتســمى هذه الحوادث بالحوادث المركبة وسـميت كذلك لإمكانية تجزئة أي نتيجة فيها إلى جزأين أو أكثر فمثلاً النتيجة (**HT**) نرى بأنه يمكن تجزئتها إلى (**H**) و (**T**) .

مثال : فحص فصيلة دم شخص معين هي تجربة عشوائية ونتائجها هي (**A , B , AB , O**) وهي أيضاً من الحوادث البسيطة .

مثال : تحديد عمر جهاز الكتروني (Z) هو تجربة عشوائية وان الحوادث هي ($0 \le Z \le T$) حيث أن (**T**) هو زمن معين . وهو من الحوادث البسيطة .

مثال : اختيار احد الطلبة وقراءة طوله أو وزنه. وهو من الحوادث البسيطة .

<u>الاحتمال</u> :

يدخل مفهوم الاحتمال في حياتنا اليومية فمثلاً غالباً ما نســـمع أو نقول التعبير التالي: من المحتمل أن تمطر السماء غداً؛ من المرجح وصول الطائرة متأخرة الليلة ؛ احتمال فوز فريق لكرة القدم على فريق أخر هو كذا . إن كل تعبير من التعبيرات الســـابقة مبني على مفهوم الاحتمال أي ترجيح حدوث حدث معين في المســـتقبل غير مؤكد الوقوع وبالتالي فبالاحتمال نعبر عن مقدار ثقتنا في وقوع هذا الحدث مســـتقبلاً ، إذاً فمصطلح الاحتمال يعني : مقدار ثقتنا في إمكانية حدوث شيء غير مؤكد الوقوع ، ويمكن توضيح الاحتمال رياضياً وعلى النحو التالي :

لتكن لدينا تجربة عشوائية تحدث بعدد مساوٍ إلى [$n(\Omega)$] من النتائج الكلية المتنافية وذات نفس الفرصة في الظهور وان [$n(A)$]عدد النتائج الممكنة لوقوع حادثة معينة مثل (A) [موضوع الدراسة] معرفة في (Ω) . عندئذٍ فان احتمال حدوث (A) يرمز له بالرمز [$P_r(A)$] ويعرف بالشكل الآتي :

$$P_r(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

ويعرف أيضاً بنجاح حدوث الحادثة (**A**) .

فإذا كانت [$n(A) = 0$] فهذا يدل على أن الحادثة (A) لم تظهر خلال التجربة حتى في حالة تكرار التجربة عدد من المرات ، لذا يمكننا القول بان الحادثة (A) حادثة مســتحيلة الوقوع (الحدوث) وان $P_r(A) = 0$. فمثلا عندما نقول ماهو احتمال عيش شخص قلبه توقف عن العمل نجد أن هذا الاحتمال مساوٍ للصفر وهو حادثة مسـتحيلة الوقوع ، أما إذا كانت [$n(A) = n(\Omega)$] فهذا يدل على أن الحادثة (A) قد حدثت في جميع تكرارات التجربة وتســمى الحادثة (A) حادثة مؤكدة الوقوع وان $P_r(A) = 1$ فمثلا نقول ما هو احتمال وفاة

شخص يوماً ما ؟ نجد أن احتمال حدوث هذه الحادثة مساوٍ للواحد وهي أكيدة الحدوث لان الإنسان لابد أن يموت يوماً ما . أما إذا كانت الحادثة (A) حادثة عشوائية فنتوقع بشكل عام أن تكون $[0 \le n(A) \le n(\Omega)]$ وهذا يعني أن لأي حادثة عشـــوائية مثل (A) يكون $[0 \le P_r(A) \le 1]$ ، وكلما اقتربت $P_r(A)$ من الواحد زادت احتمالية حدوث الحادثة (A) وبالعكس فكلما اقتربت $P_r(A)$ من الصـفر قل احتمال حدوث الحادثة (A) . وهنا يجب التنويه إلى أن مسـالة الحكم على صـغر وكبر الاحتمال تتوقف على طبيعة التجربة كذلك على عدد الحالات الممكنة لوقوع الحادثة(A) وعلى عدد الحالات الكلية $n(\Omega)$ إذ انه كلما زادت $n(A)$ زادت درجة الاحتمال وكلما زادت $n(\Omega)$ قلت درجة الاحتمال .ولغرض فهم تأثير طبيعة التجربة على درجة الاحتمال نجد مثلاً عندما نقول أن احتمال وجود بطارية معيبة في إنتاج يومي معين هو (0.01) ، هذا يعني انه من بين كل مئة بطارية منتجة هناك بطارية واحدة معيبة وهذا الأمر من الممكن قبوله منطقياً واعتباره صـغيراً من الناحية العملية ؛ وإذا قال طبيب أخصـائي في الجراحة العامة بان احتمال حدوث مضـاعفات بعد إجراء عملية زرع الكلى هو (0.02) فهذا يعني لو تم إجراء العملية لـــــــ(100) مريض فأننا نتوقع حدوث مضـاعفات لشخصـين وعدم حدوث مضاعفات للأشخاص الثمانية والتسعين وهو احتمال صـغير أيضـاً ؛ أما إذا قلنا بان احتمال حدوث عطل في الطائرة وهي في الجو هو (0.01) فمن الغير منطقي القبول بصـغر هذه القيمة لان هذه القيمة تدل على انه إذا انطلقت مئة طائرة فانه من المحتمل حدوث عطل في إحداها متسـببة بسقوطها ومقتل مــن فيها .عموما يمكن القول أن التجربة هي التي تحدد صغر الاحتمال بحيث يمكن القبول به أو تجاهله.

بديهيات الاحتمال : إذا كانت (Ω) تمثل مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشـــوائية فان $[P_r(A)]$ المعرفة على (Ω) تسمى احتمالاً إذا حققت الشروط الآتية :

- إن $[0 \le P_r(A) \le 1]$ لجميع قيم A حيث أن : $A \in \Omega$.
- $P_r(\Omega) = \sum_{k=1}^{n} P_r(A_k) = 1$ وان $P_r(\phi) = 0$ حيث أن k يشـــير إلى حادثة معينة ، n عدد الحوادث المعرفة في (Ω) .
- إن احتمال اتحاد عدد من الحوادث المتنافية أي أن : $([A_i \cap A_j = \phi \quad \forall\ i \ne j])$ والمعرفة على (Ω) مثل $(A_1, A_2, A_3, ...)$ يكافئ : $P_r(\bigcup_{k=1} A_k) = \sum_{k=1} P_r(A_k)$. والمقصــود بالحوادث المتنافية هي أن وقوع إحداها ينفي (يمنع) وقوع الأخرى .

مثال : عند رمي زهرة نرد مرة واحدة ، المطلوب جد فضاء العينة ثم أوجد احتمال :

1- الحصول على الرقم (5) .

2- الحصول على رقم فردي .

3- الحصول على رقم اكبر من (4) .

الحل :

بالنسبة لفضاء العينة فهو كل النتائج الممكنة من رمي زهرة النرد وهو كالآتي :

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

لنفرض أن :

(A_1) تمثل (حدث) الحصول على الرقم (5) أي أن $A_1 = \{5\}$

(A_2) تمثل (حدث) الحصول على رقم فردي أي أن $A_2 = \{1,3,5\}$.

(A_3) تمثل (حدث) الحصول على رقم اكبر من (4) أي أن $A_3 = \{5,6\}$.

فان :

$$P_r(A_1) = \frac{1}{6} \;\; , \;\; P_r(A_2) = [\{P_r(1) = \frac{1}{6}\} + \{P_r(3) = \frac{1}{6}\} + \{P_r(5) = \frac{1}{6}\}] = \frac{3}{6} \;\; , \; P_r(A_3) = \frac{2}{6}$$