نظرية (1) : في المعاينة العشوائية البسيطة اثبت ان الوسط الحسابي للعينة ($\bar{y}$) هو تقدير غير متحيز للوسط الحسابي للمجتمع ($\bar{Y}$) اي هل ان $E(\bar{y})=\bar{Y}$.

البرهان : لغرض تسليط الضوء بشكل اكبر على هذا البرهان كونه يمثل الركيزة الاساسية للعديد من البراهين سوف نقوم ببرهنته مع اعطاء مثال عددي لزيادة التوضيح .

البرهان : $E(\bar{y})=\bar{Y}$	المثال: لنفرض انه لدينا مجتمع مؤلف من ثلاث مفردات ($N=3$) بالقياسات $Y=1,2,3$ ، فاذا قمنا بسحب عينة عشوائية بحجم ($n=2$) ، بين ان $E(\bar{y})=\bar{Y}$
الطرف الايمن $\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_i}{N}$ الطرف الايسر $E(\bar{y})\overset{?}{=}\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_i}{N}$ $\because E(Y)=\sum_{i=1}Y_i\,P(Y_i)$ وان ($P(Y_i)$) يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (Y) وهو كما ذكرنا في الفصل الاول يمثل احتمال ظهور المفردة (i) في المتغير العشوائي (Y) ويساوي ($\frac{1}{N}$) وهذا الاحتمال متساوي لكل قيمة من قيم (Y) . وبما ان عدد قيم (Y) هو (N) اذاً : $E(Y)=\sum_{i=1}^{N}Y_i\frac{1}{N}=\bar{Y}$ اذا بنفس الطريقة يمكننا القول بان : $E(\bar{y})=\sum_{i=1}^{C_n^N}\bar{y}_i\,P(\bar{y}_i)$ ولو نظرنا الى المثال العددي لأمكننا القول بان C_n^N تمثل عدد العينات الممكن سحبها بحجم (n) **من** مجتمع حجمه (N) وان $P(\bar{y}_i)$ يمثل احتمالية سحب أي عينة من العينات المكونة نتيجة سحب عينة بحجم (n) من مجتمع حجمه (N) اذاً :	الطرف الايمن : $\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_i}{N}=\frac{1+2+3}{3}=2$ الطرف الايسر : ان عدد العينات الممكن سحبها من هذا المجتمع بحجم (n=2) هو $C_n^N=C_2^3=3$ ، وهذه العينات هي : (1) (2) (3) (1,2) , (1,3) ,(2,3) وان : $\bar{y}_1=\frac{1+2}{2}=1.5$, $\bar{y}_2=\frac{1+3}{2}=2$, $\bar{y}_3=\frac{2+3}{2}=2.5$ $E(\bar{y})=\sum_{i=1}^{C_n^N}\bar{y}_i\,P(\bar{y}_i)=\sum_{i=1}^{C_n^N}\bar{y}_i\frac{1}{C_n^N}=\sum_{i=1}^{3}\bar{y}_i\frac{1}{3}$ $\therefore E(\bar{y})=\frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2+\bar{y}_3}{3}=\frac{1.5+2+2.5}{3}=2$ اذاً تبين لنا ان : $E(\bar{y})=\bar{Y}$ لكي نبين صحة القاعدة الاتية : $\sum_{j=1}^{n}(y_{1j}+y_{2j}+...+y_{mj})=C_{n-1}^{N-1}\sum_{i=1}^{N}Y_i$ نجد ان : $\sum_{j=1}^{2}(y_{1j}+y_{2j}+y_{3j})\overset{?}{=}C_{2-1}^{3-1}\sum_{i=1}^{3}Y_i$

$$E(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{C_n^N} \bar{y}_i \frac{1}{C_n^N}$$

لنفرض ان $C_n^N = m$ ، اذاً :

$$E(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i \frac{1}{m} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_m}{m}$$

$$\because \bar{y}_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{1j}}{n} \,,\; \bar{y}_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{2j}}{n} \,,\ldots, \bar{y}_m = \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{mj}}{n}$$

$$E(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i \frac{1}{m} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_m}{m}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{y_{1j}}{n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{2j}}{n} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{mj}}{n}}{m}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{1j} + \sum_{j=1}^{n} y_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} y_{mj}}{n\,m}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} (y_{1j} + y_{2j} + \ldots + y_{mj})}{n\,m}$$

ان المقدار الذي في البسط يمثل حاصل جمع كافة المفردات الظاهرة في جميع العينات المسحوبة ، وهناك قاعدة تقول بان مجوع مفردات العينات المسحوبة من المجتمع بحجم (n) تساوي عدد مرات ظهور أي مفردة في العينات المسحوبة مضروباً في مجموع مفردات المجتمع ، أي ان :

$$\sum_{j=1}^{n} (y_{1j} + y_{2j} + \ldots + y_{mj}) = C_{n-1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$\therefore E(\bar{y}) = \frac{1}{n\,m} C_{n-1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$\because m = C_n^N$$

$$\therefore E(\bar{y}) = \frac{1}{n} \frac{1}{C_n^N} C_{n-1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$= \frac{1}{n} \; \frac{1}{\frac{N!}{n!\,(N-n)!}} \; \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!} \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$(y_{11} + y_{21} + y_{31}) + (y_{12} + y_{22} + y_{32}) \overset{?}{=} 2(6)$$

اذ انه مثلاً : (y_{31}) تمثل المفردة الاولى من العينة الثالثة ، وان (y_{12}) تمثل المفردة الثانية من العينة الاولى . وهكذا .. اذاً :

$$(1+1+2) + (2+3+3) \overset{?}{=} 2(6)$$

$$\therefore 12 = 12$$

اي ان القاعدة الرياضية صحيحة .

	$=\frac{1}{n}\ \frac{n(n-1)!\,(N-n)!}{N\,(N-1)!}\ \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}\sum_{i=1}^{N}Y_i$ $\therefore E(\bar{y})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i=\bar{Y}$

برهان ثاني لنظرية (1) :

$$E(\bar{y})=E\ [\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(y_i)$$

السؤال المطروح هنا : كم من العينات الممكن تكوينها، وبما ان اقل حجم عينة يمكن سحبه هو $(n=1)$ من مجتمع حجمه (N) اذا فان عدد العينات الممكن تكوينها هي :

$$C_1^N=\frac{N!}{1!(N-1)!}=N$$

وبما ان عدد العينات هو (N) فان احتمال ظهور اي عينة من هذه العينات هو $\frac{1}{N}$ ، اذاً :

$$E(y_i)=\sum_{i=1}^{N}y_i\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$$

$$\because \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i=\bar{Y}$$

$$\therefore E(\bar{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}=\frac{1}{n}(n)(\bar{Y})=\bar{Y}$$

نتيجة :في المعاينة العشوائية البسيطة اثبت ان القيمة المتوقعة للمجموع الكلي التقديري تساوي المجموع الكلي الحقيقي ، اي اثبت ان :

- $E\left[\hat{Y}\right]=Y$

البرهان :

$$\because \hat{Y}=N\ \bar{y}$$

$$\therefore E[\hat{Y}]=E[N\ \bar{y}]=N\,E[\bar{y}]$$

$$\because E[\bar{y}]=\bar{Y}$$

$$\therefore E[\hat{Y}]=N\,\bar{Y}=N\,\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_i}{N}=\sum_{i=1}^{N}Y_i=Y$$