الدوال الاحتمالية للمتغيرات العشوائية :

إن نظرية الاحتمالات تختص في صياغة نموذج رياضي لتجربة عشوائية يوضح سلوك ظاهرة معينة (متغير عشوائي) أو مجموعة ظواهر (متغيرات عشوائية) أي إننا بصدد صياغة دالة تعبر عن سلوك هذا المتغير العشوائي في حقل الأعداد الحقيقية ($\Re$). حيث أن لكل متغير عشوائي دالة احتمالية مرافقة له يمكن استخدامها لوصف ذلك المتغير وحساب الاحتمالات الخاصة به وإيجاد القيمة المتوقعة وغيرها من المفاهيم لذلك فعندما نقول متغير عشوائي فان ذلك يكون ناقصاً من دون قراءة توزيعه الاحتمالي ، و يمكن تحديد نوعين رئيسيين من دوال المتغيرات العشوائية استناداً إلى نوع المتغير العشوائي من حيث كونه متغيراً متقطعاً أم مستمراً وهما :

- **دوال الكتلة الاحتمالية : Probability Mass Functions**

وتسمى أيضاً بالتوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية متقطعة ، حيث أن كل قيمة معرفة على فضاء العينة (Ω) تقترن بقيمة احتمالية فإذا كانت ($X_1, X_2, ..., X_k$) تمثل عناصر (Ω) عندئذ فان كل عنصر من هذه العناصر ستقابله قيمة احتمالية واحدة فقط هي على التوالي $[P_r(X_1), P_r(X_2), ..., P_r(X_k)]$ هذه القيمة الاحتمالية تسمى (الكتلة الاحتمالية) المقترنة بالعنصر ($X_i, i = 1, 2, 3, ..., k$) [مصطلح الكتلة يدل على أن قيمة أي مشاهدة في هذا المتغير تأتي من قياس كتلة الشيء] . إن مجموعة القيم الأخيرة تسمى أيضاً التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي بحيث أن $[0 \le P_r(X_i) \le 1]$، وان $\sum_{X_i \in \Omega} P_r(X_i) = P_r(\Omega) = 1$ أي أن دالة الكتلة الاحتمالية منطلقها الحدث (X) ومداها $[0,1]$. إن معرفتنا المسبقة لدالة الكتلة الاحتمالية إلى المتغير (X) تسمح لنا بحساب احتمال أي حادثة (مجموعة جزئية) معرفة في (Ω) وذلك عن طريق تحديد النقاط الواقعة ضمن تلك المجموعة ومن ثم نجمع الاحتمالات الخاصة بها أي انه بالإمكان إيجاد القيمة الاحتمالية عند نقطة معينة أو ضمن فترة على أن يتم اخذ قيمة الاحتمال بشكل مستقل عند كل نقطة في الفترة .

مثال : عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات ، المطلوب إيجاد :

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة .

2- احتمال $P_r(x = 3)$.

3- احتمال $P_r(1 \le x \le 3)$.

الحل :

1) بما أن المتغير العشوائي (X) يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث إذاً فان قيم المتغير (X) ودالة الكتلة الاحتمالية المرافقة لكل حدث هي :

التسلسل	نوع الحادثة	$P_r(X)$	قيمة X
1	**عدم الحصول على صورة في أي من الرميات الثلاث أي حدوث الحادثة (TTT)**	**1/8**	**0**

1	3/8	الحصول على صورة واحدة في الرميات الثلاث أي الحوادث (TTH)(THT)(HTT)	2
2	3/8	الحصـــول على صـــورتين في الرميات الثلاث أي الحوادث (HTH)(THH)(HHT)	3
3	1/8	الحصـول على ثلاث صـور في الرميات الثلاث أي الحادثة (HHH)	4

$P_r(X=3)=\frac{1}{8}$ (2

$P_r(1 \le X \le 3)=P_r(X=1)+P_r(X=2)+P_r(X=3)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ (3

- **دوال الكثافة الاحتمالية : Probability Density Functions**

وتســمى بالتوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشــوائية مســتمرة ، فعلى فرض أن (X) متغير عشــوائي مســــتمر وان **f(X)** دالة بدلالة هذا المتغير . فإن **f(X=A)** في هذه الحالة تمثل قيمة الدالة f عند النقطة **X=A** ولا تعبر عن احتمال أن **X=A** ، وذلك لان (Ω) في هذه الحالة غير قابلة للعد (أي أن قيم المتغير X معرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$) ، وهذا يعني أن احتمال النقطة **X=A** في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة مساو للصفر . لذا لا يمكن تعريف الدالة الاحتمالية التي تعبر عن سلوك **X** ، لكن يمكن تعريف هذه الدالة ضمن فترة (مجموعة جزئية) معرفة في (Ω) مثل $A=\{X: a<x<b\}$ أي حساب احتمال أن $x \in A$ أي $P_r(x \in A)$. حيث أن :

$$P_r(X \in A)=\int_A f(x)\,dx \qquad A \subseteq \Re$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P_r(\Re)=P_r(\Omega)=1$$

بصورة عامة إذا كان المتغير العشوائي مستمراً عندئذٍ يمكن إيجاد احتمال أن ينتمي (X) إلى مجموعة جزئية في الخط الحقيقي وذلك بأجراء التكامل لدالة كثافة احتمال المتغير (X) على تلك المجموعة.

<u>**بعض خواص التوزيعات الاحتمالية :**</u>

1− التوقع الرياضي : Arithmetic Expected

لنفرض أن (X) متغير عشوائي بدالة كتلة احتمالية **P(X)** أو كثافة احتمالية **f(X)** ، ولتكن **g(X)** أي دالة عند ئذٍ يعرف التوقع الرياضي لـ**g(X)** بأنه عملية إيجاد متوسط (مركز) الدالة **g(X)** ، كما يعرف بأنه الوسط الحاسبي الموزون بالاحتمال **P(X)** أو **f(X)** للدالة **g(X)** ويرمز لهذه العملية بالرمز **E[g(X)]** ، حيث أن :

إذا كان المتغير العشوائي متقطعاً $$E[g(X)]=\sum_{i=1} g(X_i)\,P(X_i)=\mu$$

إذا كان المتغير العشوائي مستمراً $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)\ f(X)\ dx = \mu$

مع ملاحظة أن (μ) يمثل الوسط الحسابي للمجتمع وهو مساوٍ إلى ($\overline{X}$) المستخرج بالصيغة المعروفة ($\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$) الذي سيتم توضيحه في الفقرات اللاحقة.

خصائص التوقع الرياضي:

1- إذا كانت (c) كمية ثابتة فان :

$$E[c] = c$$
$$E[c\,g(X)] = c\,E[g(X)]$$

2- إذا كانت [$g_1(X)$ ، $g_2(X)$] دالتين حقيقيتين لـ (X) فان :

$$E[g_1(X) \mp g_2(X)] = E[g_1(X)] \mp E[g_2(X)]$$

3- إذا كان (X_i, X_j) متغيرين عشوائيين بحيث أن ($i \neq j$) فان :

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i\ X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

وتسمى العلاقة الأخيرة بالتباين المشترك بين المتغيرين (X_i, X_j) .

مثال: لبيانات المثال السابق احسب 1):- $E(3X+5)$ ؛ 2):- $E(6)$ ؛ 3):- $E(X^2)$

الحل :

بما أن المتغير العشوائي من النوع المتقطع إذاً:

1- $\because E(3X+5) = \sum_{i=1}^{4} (3X_i + 5)\ P(X_i)$

أي انه يجب إيجاد المقادير الآتية:

التسلسل	قيم (X_i)	$P_r(X_i)$	$X_i\ P_r(X_i)$	$3X_i + 5$	$(3X_i + 5)\ P_r(X_i)$	$X_i^2\ P_r(X_i)$
1	0	1/8	0	5	5/8	$(0)^2 \times 1/8 = 0$
2	1	3/8	3/8	8	24/8	$(1)^2 \times 3/8 = 3/8$
3	2	3/8	6/8	11	33/8	$(2)^2 \times 3/8 = 12/8$
4	3	1/8	3/8	14	14/8	$(3)^2 \times 1/8 = 9/8$
$\sum$		1	1.5		76/8=9.5	24/8=3

$$\Rightarrow E(3X+5) = \sum_{i=1}^{4} (3X_i + 5)\ P(X_i) = 9.5$$

كما يمكن إيجاد توقع المقدار السابق بالاستعانة بإحدى خواص التوقع وكالاتي:

$$E(3X+5) = 3E(X)+5 = 3[\sum_{i=1}^{4} X_i \; P(X_i)]+5 = 3(1.5)+5 = 9.5$$

$$2\text{-} \; E(6) = \sum_{i=1}^{4} 6 \; P(X_i) = 6\sum_{i=1}^{4} P(X_i) = 6[P(0)+P(1)+P(2)+P(3)] = 6[1] = 6$$

$$3\text{-} \; E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} X_i^2 \, P(X_i) = (0)^2 P(0)+(1)^2 P(1)+(2)^2 P(2)+(3)^2 P(3) = 3$$

2- التباين :

إن التباين مقياس لدرجة تشتت مربع قيم المتغير العشوائي عن الوسط الحسابي ، فإذا كانت قيمة التباين صغيرة فهذا مؤشر على أن التوزيع الاحتمالي مرتكز حول الوسط ، أما إذا كانت قيمته كبيرة فهو مؤشر على أن التوزيع الاحتمالي مشتت حول الوسط ، ويرمز للتباين رياضياً بالرمز $[V(X)]$ أو $[\sigma^2_{(x)}]$ ويعرف بالعلاقة الآتية :

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X-\overline{X})^2$$

علما أن طريقة حسابه تعتمد أيضاً على نوع المتغير العشوائي حيث أن :

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{\forall i} (X_i-\mu)^2 P(X_i)$$ إذا كان المتغير العشوائي متقطعاً

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 f(X) d_X$$ إذا كان المتغير العشوائي مستمراً

كما يمكن التعبير عن التباين لأي متغير عشوائي كما في الصيغة الآتية:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ومن خواص التباين :

1- إذا كانت (c) كمية ثابتة فان : $V(c)=0$.

2- إذا كانت (a,b) كميات ثابتة وكانت $[g(X)=a\,X - b]$ فان :

$$V[g(X)] = V[aX-b] = a^2 V(X)$$

3- إن $V(-X) = V(X)$.

كما يعرف جذر التباين بالانحراف المعياري (القياسي) والذي بدوره يبين مدى تشتت قيم المتغير العشوائي نفسها عن الوسط الحسابي وليس مربع تلك القيم كما هو الحال في التباين ، ويرمز للانحراف المعياري بالرمز :

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2_{(x)}} = \sigma_{(x)}$$

مثال : لبيانات المثال السابق ، احسب 1):- $V(X)$ ؛ 2):- $V(6)$ ؛ 3):- $V(3X+5)$.

الحل:

$$1\text{-} \; V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - (1.5)^2 = 0.75$$

2- $\mathbf{V(6) = E(6^2) - [E(6)]^2 = 36 - (6)^2 = 36 - 36 = 0}$

3- $\mathbf{V(3X + 5) = 9\,V(X) + V(5) = 9(0.75) + 0 = 6.75}$