مثال : ليكن لديك المجتمع الاتي والمؤلف من طبقتين والتباينات والكلف الخاصة بكل طبقة كما هي موضحة في الجدول الاتي ، فاذا كان المطلوب سحب عينة عشوائية بحجم $(n = 4)$ فجد باستخدام التوزيع الأمثل حجوم اجزاء العينات للطبقات .

Stratum (I)	**2**	**2**	**4**	**6**	**6**
Stratum (II)	**8**	**8**	**12**	**16**	**16**

Strata	N_h	σ_h	C_h	$\sqrt{C_h}$	$N_h\ \sigma_h$	$(N_h\ \sigma_h)/\sqrt{C_h}$
I	**5**	**2**	**1**	**1**	**10**	**10**
II	**5**	**4**	**4**	**2**	**20**	**10**

الحل :

$$n_1 = \frac{N_1\sigma_1/\sqrt{C_1}}{\sum_{h=1}^{2} N_h\sigma_h/\sqrt{C_h}}4 = \frac{10}{20}4 = 2$$

$$n_2 = \frac{N_2\sigma_2/\sqrt{C_2}}{\sum_{h=1}^{2} N_h\sigma_h/\sqrt{C_h}}4 = \frac{10}{20}4 = 2$$

نلاحظ ان النسبة $\left(N_h\sigma_h/\sqrt{C_h}\right)$ متساوية لكلا الطبقتين ، لذا ظهر لدينا حجوم العيانات للطبقات متساوي اي ان الوزن الأمثل كان متساوي لكل الطبقتين .

رابعاً : طريقة توزيع نيمان Neyman's allocation method

في بعض الحالات تكون الكلف (C_h) غير متباينة ما بين الطبقات اي متساوية لذا فان :

$$C_1 = C_2 = ... = C_L = C_f = \text{Fixed}$$

عندئذ فان دالة الكلفة ستكون بالصيغة الاتية :

$$\because C = C_0 + \sum_{h=1}^{L} C_h \; n_h$$

$$C_1 = C_2 = \dots = C_L = C_f$$

$$\therefore C = C_0 + C_f \sum_{h=1}^{L} n_h$$

$$\because \sum_{h=1}^{L} n_h = n$$

$$\therefore C = C_0 + C_f n \quad \Rightarrow n = \frac{C - C_0}{C_f}$$

في هذه الحالة فان حجوم اجزاء العينات للطبقات هي :

$$n_h = \frac{N_h \sigma_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h} n$$

وهذا يدل على ان (n) تتوزع نسبياً الى $(N_h \sigma_h)$ ، وانه يجب سحب حجم عينة كبير اذا كان حجم الطبقة والاختلافات داخلها كبير.

ملاحظة : اذا كانت التباينات داخل الطبقات متساوية فان قانون حجوم اجزاء العينات للطبقات في حالة توزيع نيمان سيتحول الى قانون التوزيع المتناسب . اي ان :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_h = \sigma$$

$$\therefore n_h = \frac{N_h \sigma}{\sum_{h=1}^{L} N_h \sigma} n = \frac{\sigma \; N_h}{\sigma \sum_{h=1}^{L} N_h} n = \frac{N_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h} n = \frac{N_h}{N} n = W_h \, n$$

ملاحظة : اذا كانت $N_1 = N_2 = \dots = N_L = N$ فان قانون التوزيع المتناسب سيتحول الى قانون التوزيع المتساوي :

$$n_h = n\,W_h = n\frac{N}{\sum_{h=1}^{L} N_h}$$

$$\because N_1 = N_2 = \dots = N_L = N$$

$$\therefore n_h = n\frac{N}{\sum_{h=1}^{L} N} = n\frac{N}{N\sum_{h=1}^{L}} = n\frac{N}{NL} = \frac{n}{L}$$

نظرية : في المعاينة العشوائية الطبقية اذا كان $E[\bar{y}_h] = \bar{Y}_h$ اثبت ان القيمة المتوقعة لمتوسط العينة الطبقية في العينة يساوي الوسط الحسابي للمجتمع .اي اثبت ان :

$$E[\bar{y}_{st}] = \bar{Y}$$

Proof :

$$\because \bar{y}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{N}$$

$$\therefore E[\bar{y}_{st}] = E[\frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{N}] = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} N_h E[\bar{y}_h] = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{Y}_h = \bar{Y}$$

نتيجة : اثبت أن المجموع الكلي التقديري للعينة الطبقية هو تقدير غير متحيز للمجموع الكل الحقيقي .

$$E[\hat{Y}_{st}] = Y$$

Proof:

$$\because \hat{Y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h$$

$$\therefore E[\hat{Y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} N_h E[\bar{y}_h] = \sum_{h=1}^{L} N_h \bar{Y}_h = \sum_{h=1}^{L} N_h \frac{\sum_{i=1}^{N_h} Y_{hi}}{N_h} = \sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h} Y_{hi} = Y$$

or :

$$E[\hat{Y}_{st}] = E[N\bar{y}_{st}] = NE[\bar{y}_{st}] = N\bar{Y} = \sum_{i=1}^{N} Y_i = Y$$

نظرية : في المعاينة العشوائية الطبقية اثبت أن تباين متوسط العينة الطبقية يكون بالصيغة الاتية :

$$V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \; V[\bar{y}_h]$$

Proof :

$$\because \bar{y}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{N} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h$$

$$\because \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} N_h \bar{Y}_h = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h$$

$$\bar{y}_{st} - \bar{Y} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h = \sum_{h=1}^{L} W_h [\bar{y}_h - \bar{Y}_h]$$

بتربيع طرفي المعادلة وادخال التوقع نحصل على :

$$E[\bar{y}_{st} - \bar{Y}]^2 = E[\sum_{h=1}^{L} W_h (\bar{y}_h - \bar{Y}_h)]^2$$

$$V[\bar{y}_{st}] = E[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 (\bar{y}_h - \bar{Y}_h)^2 + \sum_{h \neq j}^{L} W_h W_j (\bar{y}_h - \bar{Y}_h)(\bar{y}_j - \bar{Y}_j)]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 E(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)^2 + \sum_{h \neq j}^{L} W_h W_j E(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)(\bar{y}_j - \bar{Y}_j)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \; V(\bar{y}_h) + \sum_{h \neq j}^{L} W_h W_j \; COV(\bar{y}_h, \bar{y}_j)$$

وبما أن كل طبقة مستقلة عن الاخرى اذا :

$$\because COV(\bar{y}_h, \bar{y}_j) = 0$$

$$V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ V(\bar{y}_h)$$

نتيجة : في المعاينة العشوائية الطبقية ، يمكننا كتابة تباين متوسط والمجموع الكلي العينة الطبقية كالاتي :

$$1 - V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ \frac{1-f_h}{n_h} \ \sigma_h^2$$

Proof :

$$\because V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ V(\bar{y}_h)$$

$$\because V[\bar{y}] = \frac{1-f}{n} \sigma^2 \quad \Rightarrow \ V[\bar{y}_h] = \frac{1-f_h}{n_h} \sigma_h^2$$

$$\therefore V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ \frac{1-f_h}{n_h} \ \sigma_h^2$$

$$2 - V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ \frac{\sigma_h^2}{n_h} - \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h^2$$

Proof :

$$\because V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ \frac{\sigma_h^2}{n_h} \ 1 - f_h = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ \frac{\sigma_h^2}{n_h} \ (1 - \frac{n_h}{N_h})$$

$$\therefore V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ \frac{\sigma_h^2}{n_h} \ - \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ \frac{\sigma_h^2}{n_h} \ \frac{n_h}{N_h}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2} \ \frac{\sigma_h^2}{N_h} = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h \sigma_h^2}{N^2}$$

$$\therefore V[\bar{y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2 \sigma_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h \sigma_h^2}{N}$$

$$3 - V[\hat{Y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} N_h \ (N_h - n_h) \frac{\sigma_h^2}{n_h}$$

Proof :

$$\because \hat{Y}_{st} = N\,\bar{y}_{st}$$

$$\therefore V[\hat{Y}_{st}] = N^2\; V[\bar{y}_{st}] = N^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2\, \frac{\sigma_h^2}{n_h}\;\; 1 - f_h = N^2 \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2}\, \frac{\sigma_h^2}{n_h}\;\; 1 - f_h$$

$$= N^2 \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{N^2}\, \frac{\sigma_h^2}{n_h}\, \left(\frac{N_h - n_h}{N_h} \right)$$

$$\therefore V[\hat{Y}_{st}] = \sum_{h=1}^{L} N_h (N_h - n_h) \frac{\sigma_h^2}{n_h}$$