نظرية (2) : في المعاينة العشوائية البسيطة اثبت ان تباين الوسط الحسابي للعينة يعطى بالصيغة الاتية :

$$V(\bar{y}) = \frac{1-f}{n}\,\sigma^2_{(y)}$$

البرهان :

لغرض برهنة ذلك نستعين ببعض القواعد وهي :

$$1-\ \ V(\bar{y}) = E[\bar{y}-\bar{Y}]^2$$

$$2-\ \ E[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2] = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$$

$$3-\ \ E[\sum_{i\neq j}^{n}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})] = \frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N-1}\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})$$

$$4-\ \ [\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})]^2 = \sum_{i\neq j}^{n}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2$$

$$5-\ \ \sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y}) = -\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$$

$$\because V(\bar{y}) = E[\bar{y}-\bar{Y}]^2 = E[\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}-\bar{Y}]^2 = E[\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - n\bar{Y}}{n}]^2 = \frac{1}{n^2}E[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2]$$

$$= \frac{1}{n^2}\ E[\sum_{i\neq j}^{n}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2]$$

$$= \frac{1}{n^2}\,[\frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N-1}\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y}) + \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2]$$

$$= \frac{1}{n^2}\,[\frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N-1}\{-\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2\} + \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2]$$

$$= \frac{1}{n^2}\,[\frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N-1}\{-\ (N-1)\ \sigma^2_{(y)}\} + \frac{n}{N}\ (N-1)\ \sigma^2_{(y)}]$$

$$= -\frac{n-1}{nN}\sigma^2_{(y)} + \frac{1}{nN}\ (N-1)\ \sigma^2_{(y)}$$

$$= \frac{1}{nN}\sigma^2_{(y)}[-(n-1)+(N-1)] = \frac{1}{nN}\sigma^2_{(y)}[-n+1+N-1]$$

$$= \frac{1}{nN}\sigma^2_{(y)}\ (N-n) = \frac{\sigma^2_{(y)}}{n}\ (\frac{N-n}{N}) = \frac{1-f}{n}\ \sigma^2_{(y)}$$

ملاحظة : لغرض برهنة ان :

$$1-E[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2]=\frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$$

$$2-\ E[\sum_{i\neq j}^{n}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})]=\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})$$

Proof :

$$\because E(y_i)=\sum_{i=1}^{N}y_i\,P(y_i)=\sum_{i=1}^{N}y_i\,\frac{1}{N}$$

$$\therefore 1-\ E[(y_i-\bar{Y})^2]=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2\,\frac{1}{N}$$

$$\therefore E[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})^2]=\sum_{i=1}^{n}E(y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2\,\frac{1}{N}$$

$$=\frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$$

$$2-\ E[(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})]=\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})\frac{1}{N}\frac{1}{N-1}$$

$$\therefore E[\sum_{i\neq j}^{n}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})]=\sum_{i\neq j}^{n}E[(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})]$$

$$=\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})\frac{1}{N}\frac{1}{N-1}$$

$$=\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})$$

كما انه لغرض بيان صحة العلاقة :

$$\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})=-\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$$

نأخذ المثال الاتي : ليكن لدينا المتغير (Y_i) بالقياسات ، $Y_i=1,2,3$ ، حيث ان $(\bar{Y}=2)$اذا الطرف الايسر :

$$\sum_{i\neq j}^{N}(y_i-\bar{Y})(y_j-\bar{Y})=(y_1-\bar{Y})(y_2-\bar{Y})+(y_2-\bar{Y})(y_1-\bar{Y})+(y_1-\bar{Y})(y_3-\bar{Y})+(y_3-\bar{Y})(y_1-\bar{Y})$$

$$(y_2-\bar{Y})(y_3-\bar{Y})+(y_3-\bar{Y})(y_2-\bar{Y})$$

$$=(1-2)(2-2)+(2-2)(1-2)+(1-2)(3-2)+$$

$$(3-2)(1-2)+(2-2)(2-3)+(3-2)(2-2)$$

$$= 0 + 0 + (-1) + (-1) + 0 + 0$$
$$= -2$$

اما بالنسبة للطرف الايمن :

$$-\sum_{i \neq j}^{N} (y_i - \bar{Y})^2 = -[(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2] = -2$$

نتيجة : في المعاينة العشوائية البسيطة اثبت ان :

$$V(\hat{Y}) = N^2 \frac{1-f}{n} \sigma^2_{(y)}$$

Proof :

$$\because \hat{Y} = N \ \bar{y}$$

$$\therefore V(\hat{Y}) = V(N \ \bar{y}) = N^2 V(\bar{y}) = N^2 \frac{1-f}{n} \ \sigma^2_{(y)}$$

نظرية : في المعاينة العشوائية البسيطة اثبت ان:

$$E(S^2_{(y)}) = \sigma^2_{(y)}$$

Proof :

$$\because \ S^2_{(y)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

بإضافة وطرح ($\bar{Y}$) داخل القوس نحصل على :

$$\because \ S^2_{(y)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y} + \bar{Y} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \bar{Y}) - (\bar{y} - \bar{Y})]^2$$

$$= \frac{1}{n-1} [\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2 - n(\bar{y} - \bar{Y})^2]$$

$$E(S^2_{(y)}) \quad = \frac{1}{n-1} [E\{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2\} - nE(\bar{y} - \bar{Y})^2] = \frac{1}{n-1} [\frac{n}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2 - nV(\bar{y})]$$

$$= \frac{1}{n-1} [\frac{n}{N} (N-1)\sigma^2_{(y)} - nV(\bar{y})] = \frac{1}{n-1} [\frac{n}{N} (N-1)\sigma^2_{(y)} - n\frac{1-f}{n} \sigma^2_{(y)}]$$

$$= \frac{1}{n-1} \sigma^2_{(y)} [n - \frac{n}{N} - 1 + \frac{n}{N}] = \sigma^2_{(y)}$$

ملاحظة : ان التقديرات الغير متحيزة لكل من تباين الوسط الحسابي والمجموع الكلي هي :

$$S^2_{(y)}(\bar{y}) = \frac{1-f}{n} \ S^2_{(y)}$$

$$S^2_{(y)}(\hat{Y}) = N^2 \frac{1-f}{n} \ S^2_{(y)}$$

والجذر التربيعي لكل من المقدارين اعلاه يسمى بالخطأ المعياري لكل من الوسط الحسابي والمجموع الكلي على التوالي .

مثال : سحبت عينة عشوائية بحجم $(n=2)$ من مجتمع مؤلف من خمسة مفردات بالقيم $Y=1,5,3,7,2$ ،

المطلوب :

1- جد عدد العينات الممكن سحبها .

2- بين ان : $E(\bar{y})=\bar{Y}$ ، $V(\bar{y})=\dfrac{1-f}{n}\sigma^2_{(y)}$ ، $E(S^2_{(y)})=\sigma^2_{(y)}$ ، $E(\hat{Y})=Y$

الحل :

1- ان عدد العينات الممكن سحبها هي :

$$C^5_2=\frac{5!}{2!\,3!}=10$$

2- لكي نبين صحة العلاقات نقوم بإيجاد قيم كل من الوسط الحسابي والمجموع الكلي والتباين للمجتمع وكالاتي :

$$\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_i}{N}=\frac{1+5+3+7+2}{5}=3.6$$

$$Y=1+5+3+7+2=18$$

$$\sigma^2_{(y)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\bar{Y})^2}{N-1}=5.8$$

الان لبيان هل ان $E(\bar{y})=\bar{Y}$ نقوم بإيجاد كافة العينات الممكن سحبها وكالاتي :

ت	العينات	متوسط كل عينة $\bar{y}_i$	تباين كل عينة S^2_i	$(\bar{y}_i-\bar{Y})^2$	$\hat{Y}_i=N\,\bar{y}_i$
1	(1,5)	$\bar{y}_1=\dfrac{(1+5)}{2}=3$	$S^2_1=\dfrac{26-\dfrac{(6)^2}{2}}{2-1}=8$	$(3-3.6)^2=0.36$	$\hat{Y}_1=N\,\bar{y}_1=5(3)=15$
2	(1,3)	2	2	2.56	10
3	(1,7)	4	18	0.16	20
4	(1,2)	1.5	0.5	4.41	7.5
5	(5,3)	4	2	0.16	20
6	(5,7)	6	2	5.76	30
7	(5,2)	3.5	4.5	0.01	17.5
8	(3,7)	5	8	1.96	25
9	(3,2)	2.5	0.5	1.21	12.5
10	(7,2)	4.5	12.5	0.81	22.5
	$\sum$	36	58	17.4	180

$$a- \quad E(\bar{y}) \overset{?}{=} \bar{Y}$$

$$\bar{Y} = 3.6$$

$$E(\bar{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{C_n^N} \bar{y}_i}{C_n^N} = \frac{36}{10} = 3.6$$

$$\therefore E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

$$b- \quad V(\bar{y}) \overset{?}{=} \frac{1-f}{n} \sigma^2_{(y)}$$

$$\because V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{C_n^N} (\bar{y}_i - \bar{Y})^2}{C_n^N} = \frac{17.4}{10} = 1.74$$

$$and \quad \frac{1-f}{n} \sigma^2_{(y)} = \frac{1-\frac{2}{5}}{2}(5.8) = 1.74$$

$$\therefore V(\bar{y}) = \frac{1-f}{n} \sigma^2_{(y)}$$

$$c- \quad E(S^2_{(y)}) \overset{?}{=} \sigma^2_{(y)}$$

$$\sigma^2_{(y)} = 5.8$$

$$E(S^2_{(y)}) = \frac{\sum_{i=1}^{C_n^N} S^2_{i(y)}}{C_n^N} = \frac{58}{10} = 5.8$$

$$\therefore E(S^2_{(y)}) = \sigma^2_{(y)}$$

$$d- \quad E(\hat{Y}) \overset{?}{=} Y$$

$$Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i = 1+5+3+7+2 = 18$$

$$E(\hat{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^{C_n^N} \hat{Y}_i}{C_n^N} = \frac{180}{10} = 18$$

$$\therefore E(\hat{Y}) \overset{?}{=} Y$$

واجب ايجاد :

- $E(\bar{y}^2)$ -1
- $V(\hat{Y}) = N^2 V(\bar{y})$