**-التباين النسبي و معامل الاختلاف** : Coefficient of Variation

إن المقياس الأسبق والمتمثل بالتباين يقوم بقياس درجة تشتت المشاهدات عن وسطها الحسابي أو هل المشـــاهدات تتمركز حول المتوســـط أم لا ، فمثلاً إذا كان معدل درجات الطلبة في مادة العينات $\bar{Y} = 70$ وكانت درجة احد الطلبة الممتحنين $Y = 80$ إذاً فان الاختلاف التام بين هذه الدرجة والمعدل العام هو $Y - \bar{Y} = 10$ أي أن الاختلاف هو عشرة درجات كما ويمكن إيجاد الاختلاف ولجميع الطلبة عن المتوسط باستخدام قانون التباين . لكن لو أردنا قياس نسبة اختلاف هذه الدرجة عن الوسط نقوم بإيجاد التباين النسبي (الاختلاف النسبي) الذي يأخذ العلاقة الآتية:

$$\frac{Y_i - \bar{Y}}{\bar{Y}} = \frac{80 - 70}{70} = 14\%$$

أي أن درجة الطالب قد اختلفت بنسبة 14% من الوسط الحسابي ، ويمكن إيجاد نسبة الاختلاف العام ولجميع الطلبة عن الوسط الحسابي عن طريق التباين النسبي والذي يأخذ الصيغة الآتية:

$$[C.V]^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{Y_i - \bar{Y}}{\bar{Y}}\right]^2}{N \ \text{or} \ (N-1)} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2}{N \ \text{or} \ (N-1)}}{\bar{Y}^2} = \frac{\sigma^2_{(y)}}{\bar{Y}^2}$$

وان الجذر ألتربيعي للمقدار الأخير يطلق عليه معامل الاختلاف حيث أن :

$$C.V = \frac{\sigma_{(y)}}{\bar{Y}}$$

وفي حالة استخدام قياسات العينة فان :

$$C.V = \frac{S_{(y)}}{\bar{y}}$$

**5-معامل الارتباط** : Correlation Coefficient

وهو مقياس لدرجة العلاقة بين متغيرين أو أكثر وصـــيغه الرياضـــية تختلف باختلاف طبيعة المتغيرات وعددها فهناك :

1- (معامل الارتباط البسيط)،(معامل الارتباط الجزئي)و(معامل الارتباط المتعدد) **[للمتغيرات الكمية]**

**2**- (معامل ارتباط الرتب لسبيرمان)،(معامل التوافق)و(معامل الاقتران) **[للمتغيرات الوصفية أو المختلطة]**

فمثلاً معامل الارتباط البسيط يبين درجة العلاقة بين متغيرين كميين فقط وصيغته الرياضية هي :

$$r_{(xy)} = \rho_{(xy)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}} = \frac{Cov(Y,X)}{\sigma_{(y)}\,\sigma_{(x)}}$$

وان قيمة معامل الارتباط البسيط تقع ما بين [-1,1] والمخطط الآتي يبين درجات الترابط وقيمها :

| (+1) | [(+1) – (0.5)] | [(0) – (less than 0.5)] | 0 | [(0) – (greater than (-0.5)] | [(-1) – (-0.5)] | (-1) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ارتباط طردي تام | ارتباط طردي قوي | ارتباط طردي قوي | عدم وجود ارتباط | ارتباط عكسي ضعيف | ارتباط عكسي قوي | ارتباط عكسي تام |

إن مربع معامل الارتباط يطلق عليه معامل التحديد (Coefficient of Determination) ويوضح هذا المقياس درجة مساهمة متغير أو مجموعة متغيرات تسمى (المتغيرات التوضيحية) في التغير الحاصل في متغير آخر يسمى المتغير المعتمد (متغير الاستجابة) ويعتبر هذا المقياس أيضاً من المقاييس المهمة للحكم على دلالة النموذج وملائمته للبيانات في نماذج الانحدار . فكلما ارتفعت قيمة معامل التحديد دل ذلك على ملائمة النموذج وعلى شدة ارتباط المتغيرات في النموذج المقدر قيد الدراسة وصيغته الرياضية :

$$\mathbf{r^2_{(xy)} = R \qquad wher \quad 0 \le R \le 1}$$

**مثال :** سجلت إحدى دوائر الأنواء الجوية البيانات التالية لعشرة أيام متتالية ممطرة عن كل من درجة الحرارة (**X**) وكمية الأمطار الساقطة (**Y**).

| X | 0 | 1 | 0.5 | -1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1.5 | -1.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 6 | 4 | 5 | 6 | 3 | 5 | 6 | 3 | 2 | 7 |

المطلوب حساب وتفسير نتيجة كل من :

1- التباين المشترك .

2- معامل الارتباط البسيط .

3- معامل التحديد .

**الحل :**

1- باستخدام الصيغة الخاصة بالتباين المشترك والموضحة سابقاً نجد أن :

$$Cov(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{N}=-1.41$$

إن تفسير النتيجة الأخيرة يدل على انه العلاقة بين المتغيرين هي علاقة عكسية.

2- إن معامل الارتباط البسيط هو :

$$r_{(xy)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})(X_i-\overline{X})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})^2}}=-0.818$$

$$\text{or}\ \ r_{(xy)}=\frac{Cov(Y,X)}{\sigma_{(y)}\,\sigma_{(x)}}=\frac{-1.41}{(1.6364)(1.0531)}=-0.818$$

إن معامل الارتباط البسيط يدل على أن العلاقة بين المتغيرين علاقة عكسية قوية (وهذا ما تم استنتاجه في معيار التباين المشترك من دون معرفة قوة العلاقة ) .

3- بما أن معامل التحديد هو مربع معامل الارتباط إذاً :

$$R=r_{(xy)}^2=(-0.818)^2=0.67$$

إن تفسير النتيجة الأخيرة ينص على انه بما أن درجة الحرارة تؤثر على كمية المطر أي أن $(X)$ هو المتغير التوضيحي و$(Y)$ هو المتغير المعتمد فان 67% من التغيرات الحاصلة في $(Y)$ سببه المتغير $(X)$ وان 33% من التغيرات الحاصلة في $(Y)$ سببه عوامل أخرى . وبمعنى آخر ( إن درجات الحرارة تؤثر بنسبة 67% من مجمل الأسباب المؤثرة في سقوط الأمطار وان 33% تتمل بأسباب أخرى غير درجات الحرارة كالرطوبة والموقع الجغرافي ،....الخ ) .

**<u>طرائق العد :</u>**

في هذه الفقرة سوف نوضح طريقتين رئيسيتين من طرائق العد والتي يستفاد منها في حل العديد من المسائل في نظرية الاحتمال ، وهاتين الطريقتين هما :

1- التباديل : Permutations

وتتمثل هذه الطريقة بعدد الطرائق المختلفة والتي يمكننا بها اختيار $(n)$ عنصر (عينة) من بين $(N)$ من العناصر بدون إرجاع مع مراعاة الترتيب في كل حالة اختيار وان $(n\le N)$ ويرمز للتباديل بالرمز $[P_n^N]$ وصيغته الرياضية هي :

$$P_n^N=\frac{N!}{(N-n)!}$$

$(N!)$ تسمى مفكوك العدد $N$ ، وان :

$$N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times ... \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times (4-1) \times (4-2) \times (4-3) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

ملاحظة : إن $[0! = 1 \;\; , 1! = 1]$ .

2- التوافيق : Combination

إن أي مجموعة من العناصر يتم اختيارها بغض النظر عن ترتيب عناصرها تسمى توفيقاً . فإذا كان لدينا (**N**) من العناصـــر المختلفة وأردنا اختيار عينة (مجموعة) مؤلفة من (**n**) من العناصـــر وبغض النظر عن الترتيب وبدون إعادة المجموعة المختارة ، فان عدد المجاميع المختلفة تســـمى بالتوافيق ، ويرمز للتوافيق بالرمز $[C_n^N]$ وصيغته الرياضية كالآتي :

$$C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

**مثال :** مجتمع مؤلف من أربعة مفردات بالقياسات (1,3,5,2) ، تم سحب عينة عشوائية منه بحجم (**n=2**) . المطلوب :

1- ما عدد العينات المختلفة الممكن سحبها من هذا المجتمع بدون إرجاع والترتيب مهم؟

2- ما عدد العينات المختلفة الممكن سحبها من هذا المجتمع بدون إرجاع والترتيب غير مهم؟

3- ما عدد مرات ظهور أي مفردة ضمن العينات المسحوبة بدون إرجاع والترتيب مهم ؟

4- ما عدد مرات ظهور أي مفردة ضمن العينات المسحوبة بدون إرجاع والترتيب غير مهم ؟

5- ما هو احتمال ظهور أي عينة من العينات المسحوبة بدون إرجاع والترتيب مهم ؟

6- ما هو احتمال ظهور أي عينة من العينات المسحوبة بدون إرجاع والترتيب غير مهم ؟

7- ما هو احتمال ظهور أي مفردة في العينات المسحوبة بدون إرجاع والترتيب مهم ؟

8- ما هو احتمال ظهور أي مفردة في العينات المسحوبة بدون إرجاع والترتيب غير مهم ؟

9- ما هو احتمال سحب أي مفردة من المجتمع من السحبة الأولى ؟

10- ما هو احتمال سحب أي مفردة من المجتمع من السحبة الثانية ؟

**الحل :**

1- بما أن العملية بدون إرجاع والترتيب مهم فأذن هي تباديل :

$$P_n^N = \frac{N!}{(N-n)!} = P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

أي انه يمكن سحب (12) عينة مختلفة من هذا المجتمع بحجم (n=2) وهذه العينات هي :

(2,5) (2,3) (5,3) (2,1) (5,1) (3,1) (5,2) (3,2) (3,5) (1,2) (1,5) (1,3)

من ملاحظة المجموعة (1,2) مثلا نجد أنها تختلف عن المجموعة (2,1) أي أن ترتيب المفردات داخل المجموعة مهم .

2- بما أن العملية بدون إرجاع والترتيب غير مهم فأذن هي توافيق:

$$C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!} = C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

وهذه (6) عينات هي : (5,2) (3,2) (3,5) (1,2) (1,5) (1,3)

لاحظ هنا إن الترتيب غير مهم أي انه لو كتبنا المجموعة بالشكل (2,1) هو نفسه إذا كتبناها بالشكل (1,2) أي لافرق بينهما بعكس الحالة الأولى .

3- إن عدد مرات ظهور المفردة (5) مثلاً في الحل الموجود في الفرع (1) هو (6) مرات ، وكذلك الحال بالنسبة للبقية أي (1) يكرر (6) مرات ،....الخ . وبشكل عام يمكننا كتابة علاقة من خلالها يمكننا إيجاد المطلوب بالصيغة الآتية :

$$P_n^{N-1} = \frac{(N-1)!}{(N-1-n)!} = P_2^3 = \frac{3!}{(4-1-2)!} = 6$$

4- إن عدد مرات ظهور المفردة (1) مثلاً في الحل الموجود في الفرع (2) هو ثلاث مرات ، وكذلك الحال بالنسبة لـــ (5) فانه يتكرر ثلاث مرات أيضاً ،....الخ . وبشكل عام يمكننا كتابة العلاقة لهذا السؤال بالصيغة الآتية:

$$C_{n-1}^{N-1} = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} = C_1^3 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$$

5- بما أن عدد العينات الممكنة هو (12) إذاً فان احتمال ظهور أي عينة من هذه العينات هو :

$$\frac{1}{P_n^N} = \frac{1}{12} = 0.083$$

6- بما أن عدد العينات الممكنة هو (6) إذاً فان احتمال ظهور أي عينة من هذه العينات هو :

$$\frac{1}{C_n^N} = \frac{1}{6} = 1.667$$

7- بما ان عدد مرات ظهور اي مفردة في العينات المسحوبة هو $(P_n^{N-1})$ من بين $(P_n^N)$ اذا :

$$\frac{P_n^{N-1}}{P_n^N} = \frac{6}{12} = 0.5$$

8- بما أن عدد مرات ظهور أي مفردة هو $(C_{n-1}^{N-1})$ من بين $(C_n^N)$ حالة إذاً :

$$P_r() = \frac{C_{n-1}^{N-1}}{C_n^N} = \frac{3}{6} = 0.5$$

9- إن احتمال سحب أي مفردة من المجتمع في السحبة الأولى هو $(\frac{1}{N})$ فمثلاً احتمال سحب أي مفردة من السحبة الأولى من المجتمع هو $(\frac{1}{4})$ أي أن احتمال سحب المفردة الثالثة والتي تحمل الرقم (5) هو $[P_r(5) = \frac{1}{N} = \frac{1}{4}]$ وكذلك الحال بالنسبة إلى أي مفردة .

10-إن احتمال سـحب أي مفردة من المجتمع في السـحبة الثانية هو $(\frac{1}{N-1})$ فمثلاً احتمال سـحب أي مفردة من السحبة الثانية من المجتمع هو $(\frac{1}{3})$ أي أن احتمال سحب المفردة التي تحمل الرقم (5) والتي لم تظهر في السحب الأولى هو $[P_r(5) = \frac{1}{N-1} = \frac{1}{3}]$ وكذلك الحال بالنسبة إلى أي مفردة متبقية .

| |
|---|
| **<u>ملاحظة</u> : يمكن إيجاد العديد من الحالات في حالة <u>الإرجاع</u> ولكن لامجال لذكرها هنا** |