نظرية : في المعاينة العشوائية الطبقية اثبت انه اذا كانت $[N-1\approx N]$ و $[N_h-1\approx N_h]$، ان :

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L}N_h\sigma_h^2+\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L}N_h(\overline{Y}_h-\overline{Y})^2=\sigma_{(w)}^2+\sigma_{(b)}^2$$

حيث ان :

$\sigma_{(w)}^2$: تمثل الاختلافات داخل الطبقات . (variation within each stratum).

$\sigma_{(b)}^2$: تمثل الاختلافات ما بين الطبقات. (variation between strata).

Proof :

$$\because \sigma_{(y)}^2=\frac{\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\overline{Y})^2}{N-1}=\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\overline{Y})^2$$

بإضافة وطرح ($\overline{Y}_h$) داخل القوس وتجزئة الحدود نحصل على :

$$\sigma_{(y)}^2=\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}[(Y_{hi}-\overline{Y}_h)+(\overline{Y}_h-\overline{Y})]^2$$

$$=\frac{1}{N}[\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\overline{Y}_h)^2+2\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\overline{Y}_h)(\overline{Y}_h-\overline{Y})+\sum_{h=1}^{L}N_h(\overline{Y}_h-\overline{Y})^2]$$

$$\because \sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\overline{Y}_h)(\overline{Y}_h-\overline{Y})=0$$

$$\because \sigma_h^2=\frac{\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\overline{Y}_h)^2}{N_h-1}=\frac{\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\overline{Y}_h)^2}{N_h}$$

$$\Rightarrow \sigma_{(y)}^2=\frac{1}{N}[\sum_{h=1}^{L}N_h\sigma_h^2+\sum_{h=1}^{L}N_h(\overline{Y}_h-\overline{Y})^2]$$

$$=\frac{1}{N}[\sum_{h=1}^{L}N_h\sigma_h^2+\sum_{h=1}^{L}N_h(\overline{Y}_h-\overline{Y})^2]$$

$$\therefore \sigma^2_{(y)} = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} N_h \sigma_h^2 + \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} N_h (\overline{Y}_h - \overline{Y})^2 = \sigma^2_{(w)} + \sigma^2_{(b)}$$

من خلال النظرية اعلاه يمكننا استنتاج ما يلي :

1- ان الاختلافات الكلية في المعاينة العشوائية الطبقية مصدرها هو الاختلافات داخل الطبقات والاختلافات ما بين الطبقات .
2- اذا كانت الاختلافات داخل الطبقات صغير فان الاختلافات ما بين الطبقات يكون كبير والعكس صحيح ، وبتعبير اخر اذا تم تقسيم المجتمع الى طبقات داخلها متجانس فان مصدر الاختلافات سيكون التباين ما بين الطبقات ، اما اذا تم تقسيم المجتمع الى طبقات متباينة فان المصدر الرئيسي للاختلافات سيكون التباين داخل الطبقات .

مثال : مجتمع معين مؤلف من $(N = 8)$ مفردات وكالاتي :

$Y_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

فاذا تم تقسيم المجتمع الى طبقتين وبحالتين وكالاتي :

Face one	**Stratum (I)**	**1**	**2**	**3**	**4**
	Stratum (II)	**5**	**6**	**7**	**8**
Face two	**Stratum (I)**	**1**	**8**	**3**	**6**
	Stratum (II)	**2**	**4**	**7**	**5**

من ملاحظة الحالتين (1) و (2) نجد انه في الحالة الاولى تم تقسيم المجتمع الى طبقتين متجانستين ، اما الحالة الثانية فانه تم تقسيم المجتمع الى طبقتين غير متجانستين .

1- بالنسبة للحالة الاولى اذا قمنا بحساب القيم ، $[\sigma^2 , \sigma^2_{(w)} , \sigma^2_{(b)}]$ نجد ان :

$$\sigma^2_{(w)} = \frac{10}{8} = 1.25 \quad , \quad \sigma^2_{(b)} = 4 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \sigma^2_{(w)} + \sigma^2_{(b)} = 1.25 + 4 = 5.25$$

من النتائج الاخيرة نجد ان مصدر الاختلافات الرئيسي قادم من الاختلافات ما بين الطبقات اي من $(\sigma^2_{(b)})$ وذلك لان $[\sigma^2_{(b)} > \sigma^2_{(w)}]$ والسبب يعون الى تجانس المفردات داخل الطبقات .

2- اما بالنسبة للحالة الثانية نجد ان :

$$\sigma^2_{(w)} = \frac{42}{8} = 5.25 \quad , \sigma^2_{(b)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \sigma^2_{(w)} + \sigma^2_{(b)} = 5.25 + 0 = 5.25$$

من النتائج الاخيرة نجد ان مصدر الاختلافات الرئيسي قادم من الاختلافات من داخل الطبقات اي من $(\sigma^2_{(w)})$ وذلك لان $[\sigma^2_{(w)} > \sigma^2_{(b)}]$.

مثال : مجتمع مؤلف من ستة طلاب $(N = 6)$ قسموا الى طبقتين ، طلاب من غير الوسط الجامعي وطلاب من الوسط الجامعي ، وكان عدد الكتب التي يمتلكها كل طالب كما في الجدول الاتي :

				$\sum$	$\bar{Y}_h$
Stratum (I)	2	4	6	12	4
Stratum (II)	8	12	16	36	12

فاذا تم سحب عينة عشوائية بحجم $(n = 2)$ من كل طبقة ، المطلوب :

1- جد عدد العينات الممكن سحبها من كلا الطبقتين سوياً .

2- بين ان : $E[\bar{y}_{st}] = \bar{Y}$ ، $E[\hat{Y}_{st}] = Y$.

الحل :

1- عدد العينات الممكن سحبها من الطبقة الاولى والثانية على التوالي هو :

$$C_n^{N_1} = C_2^3 = 3$$

$$C_n^{N_1} = C_2^3 = 3$$

اذا عدد العينات المسحوبة من كلا الطبقتين هو $C_n^{N_1}\ C_n^{N_2} = C_2^3\,C_2^3 = 9$.

حجم العينة الواجب سحبة من كلتا الطبقتين هو $n_1 + n_2 = 2 + 2 = 4$.

Stratum (I)	Stratum (II)	y_1	y_2	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$
(2,4)	(8,12)	6	20	3	10
	(8,16)		24		12
	(12,16)		28		14
(2,6)	(8,12)		20	4	10
	(8,16)		24		12
	(12,16)		28		14
(4,6)	(8,12)		20	5	10

	(8,16)		24		12
	(12,16)		28		14
Σ					

$N_1\bar{y}_1$	$N_2\bar{y}_2$	$\bar{y}_{st}$	$\hat{Y}_{st}$
9	30	6.5	39
9	36	7.5	45
9	42	8.5	51
12	30	7	42
12	36	8	48
12	42	9	54
15	30	7.5	45
15	36	8.5	51
15	42	9.5	57
		72	432

1 − $E[\bar{y}_{st}] = \bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N} = \frac{2+4+\dots+16}{6} = 8$$

$$\because \bar{y}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{N} = \frac{N_1\bar{y}_1 + N_2\bar{y}_2}{N}$$

$$\because E[\bar{y}_{st}] = E[\frac{N_1\bar{y}_1 + N_2\bar{y}_2}{N}] = \frac{N_1}{N} E(\bar{y}_1) + \frac{N_2}{N} E(\bar{y}_2)$$

$$E(\bar{y}_1) = \frac{\sum_{i=1}^{C_n^{N1}} \bar{y}_{1i}}{C_n^{N1}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \bar{y}_{1i}}{3} = \frac{3+4+5}{3} = 4$$

$$E(\bar{y}_2) = \frac{\sum_{i=1}^{C_n^{N2}} \bar{y}_{1i}}{C_n^{N2}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \bar{y}_{2i}}{3} = \frac{10+12+14}{3} = 12$$

$$\therefore E[\bar{y}_{st}] = \frac{3}{6}(4) + \frac{3}{6}(12) = 8$$

$$\therefore E[\bar{y}_{st}] = \bar{Y}$$

$$2 - E[\hat{Y}_{st}] = Y$$

$$Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i = 2 + 4 + ... + 16 = 48$$

$$\because \hat{Y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h$$

$$E[\hat{Y}_{st}] = E[\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h] = N_1 E[\bar{y}_1] + N_2 E[\bar{y}_2]$$

$$= (3)(4) + (3)(12) = 12 + 36 = 48$$

$$\therefore E[\hat{Y}_{st}] = Y$$