تقدير النسبة (R) في المعاينة العشوائية الطبقية

اذا كانت $[Y_h]$ تمثل قياسات المتغير العشوائي المدروس $[Y]$ في الطبقة $[h]$ في المجتمع .

وان $[X_h]$ تمثل قياسات المتغير العشوائي المساعد $[X]$ في الطبقة $[h]$ في المجتمع .

وكما وضحنا في المعاينة العشوائية البسيطة بان النسبة الحقيقية $[R]$ حيث ان :

$$R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

وان النسبة التقديرية هي :

$$\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

اما في المعاينة العشوائية الطبقية فان النسبة الحقيقية للطبقة $[h]$ هي :

$$R_h = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} = \frac{Y_h}{X_h}$$

والنسبة التقديرية لها هي :

$$\hat{R}_h = \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}$$

هناك طريقتان للحصول على تقدير النسبة في المعاينة العشوائية الطبقية وهما :

1- استخدام مقدر النسبة المشترك (التجميعي) $[\hat{R}_C]$. Combined ratio estimator

2- استخدام مقدر النسبة المنفرد (المنفصل) $[\hat{R}_S]$. Separate ratio estimator

ان الصيغة الرياضية لمقدر النسبة المشترك هي كالاتي :

$$\because \hat{Y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h \;, \text{ and } \quad \hat{X}_{st} = \sum_{h=1}^{L} N_h \bar{x}_h$$

$$\therefore \hat{R}_C = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} = \frac{\hat{Y}_{st}}{\hat{X}_{st}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{x}_h}$$

كما ان تباين مقدر النسبة المشترك يكون بالصيغة الاتية :

$$\therefore V[\hat{R}_C] = \frac{1}{N^2}\frac{1}{\bar{X}^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[\sigma_{y_h}^2 + R^2\sigma_{x_h}^2 - 2R\rho_{(x_h y_h)}\sigma_{y_h}\sigma_{x_h}]$$ اذ ان :

$$\sigma_{y_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\bar{Y}_h)^2}{N_h - 1}, \quad \text{and} \quad \sigma_{x_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}(X_{hi}-\bar{X}_h)^2}{N_h - 1}$$

$$\rho_{(x_h y_h)} = \frac{\sigma_{(xy)_h}}{\sigma_{x_h}\sigma_{y_h}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}(X_{hi}-\bar{X}_h)(Y_{hi}-\bar{Y}_h)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_h}(X_{hi}-\bar{X}_h)^2\sum_{i=1}^{N_h}(Y_{hi}-\bar{Y}_h)^2}}$$

اما في حالة قياسات العينة فان :

$$\therefore S^2[\hat{R}_C] = \frac{1}{N^2}\frac{1}{\bar{x}^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[S_{y_h}^2 + \hat{R}^2 S_{x_h}^2 - 2\hat{R}\rho_{(x_h y_h)}S_{y_h}S_{x_h}]$$ اذ ان :

$$S_{y_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}(y_{hi}-\bar{y}_h)^2}{n_h - 1}, \quad \text{and} \quad S_{x_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}(x_{hi}-\bar{x}_h)^2}{n_h - 1}$$

$$\rho_{(x_h y_h)} = \frac{S_{(xy)_h}}{S_{x_h}S_{y_h}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}(x_{hi}-\bar{x}_h)(y_{hi}-\bar{y}_h)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_h}(x_{hi}-\bar{x}_h)^2\sum_{i=1}^{n_h}(y_{hi}-\bar{y}_h)^2}}$$

وان الوسط الحسابي لمقدر النسبة المشترك وتباينه يكونان بالصيغة الاتية :

$$\hat{\bar{Y}}_{RC} = \hat{R}_C \bar{X} \quad , \quad \text{and} \quad V[\hat{\bar{Y}}_{RC}] = \bar{X}^2 V[\hat{R}_C]$$

اما بالنسبة لمقدر النسبة المنفرد فانه يأخذ الصيغة الاتية :

$$\hat{R}_S = \frac{\sum_{h=1}^{L} \hat{R}_h X_h}{X}$$

وان تباين مقدر النسبة المنفرد هو :

$$\therefore V[\hat{R}_S] = \frac{1}{N^2}\frac{1}{\overline{X}^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[\sigma_{y_h}^2 + R_h^2\sigma_{x_h}^2 - 2R_h\,\rho_{(x_h y_h)}\sigma_{y_h}\sigma_{x_h}]$$

اما بالنسبة لقياسات العينة فيكون بالصيغة الاتية :

$$S^2[\hat{R}_S] = \frac{1}{N^2}\frac{1}{\overline{x}^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[S_{y_h}^2 + \hat{R}_h^2 S_{x_h}^2 - 2\hat{R}_h\,\rho_{(x_h y_h)} S_{y_h} S_{x_h}]$$

وان الوسط الحسابي لمقدر النسبة المنفرد وتباينه يكونان بالصيغة الاتية :

$$\hat{\overline{Y}}_{RS} = \sum_{h=1}^{L} W_h \hat{R}_h \overline{X}_h$$

وان :

$$V[\hat{\overline{Y}}_{RS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[\sigma_{y_h}^2 + R_h^2\sigma_{x_h}^2 - 2R_h\,\rho_{(x_h y_h)}\sigma_{y_h}\sigma_{x_h}]$$

المجموع الكلي التقديري وتباينه :

يمكن ايجاد المجموع الكلي التقدير للنسبة باستخدام الطريقتين السابقتين وكالاتي :

المجموع الكلي التقديري النسبي المشترك :

$$\hat{Y}_{RC} = \hat{R}_C\, X = \frac{\overline{y}_{st}}{\overline{x}_{st}}\, X$$

المجموع الكلي التقديري النسبي المنفرد :

$$\because \hat{Y}_{R_h} = \frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} X_h = \hat{R}_h X_h$$

$$\therefore \hat{Y}_{RS} = \sum_{h=1}^{L} \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} X_h = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_{R_h} = \sum_{h=1}^{L} \hat{R}_h X_h$$

نظرية : في المعاينة العشوائية الطبقية اثبت ان المجموع الكلي التقديري النسبي المنفرد هو مقدر غير متحيز للمجموع الكلي الحقيقي :

$$E[\hat{Y}_{RS}] = Y$$

Proof :

$$\because \hat{Y}_{RS} = \sum_{h=1}^{L} \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} X_h = \sum_{h=1}^{L} \hat{R}_h X_h$$

$$\therefore E[\hat{Y}_{RS}] = \sum_{h=1}^{L} X_h E[\hat{R}_h]$$

$$\because E[\hat{R}] = R \quad , \quad \Rightarrow E[\hat{R}_h] = R_h$$

$$\therefore E[\hat{Y}_{RS}] = \sum_{h=1}^{L} X_h R_h = \sum_{h=1}^{L} X_h \frac{Y_h}{X_h} = \sum_{h=1}^{L} Y_h = Y$$

نظرية : اثبت ان

$$\therefore V[\hat{Y}_{RS}] = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h} [\sigma_{y_h}^2 + R_h^2 \sigma_{x_h}^2 - 2 R_h \rho_{(x_h y_h)} \sigma_{y_h} \sigma_{x_h}]$$

Proof :

$$\because \hat{Y}_{R_h} = \frac{y_h}{x_h} X_h = \hat{R}_h X_h \quad , \text{ and } \because \hat{Y}_{RS} = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_{R_h}$$

$$\hat{Y}_{RS} - Y = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_{R_h} - \sum_{h=1}^{L} Y_h = \sum_{h=1}^{L} [\hat{Y}_{R_h} - Y_h]$$

بتربيع طرفي المعادلة وادخال التوقع نحصل على :

$$E[\hat{Y}_{RS} - Y]^2 = E[\sum_{h=1}^{L} (\hat{Y}_{R_h} - Y_h)]^2$$

$$= \sum_{h=1}^{L} E(\hat{Y}_{R_h} - Y_h)^2 + 2\sum_{h \neq j} E(\hat{Y}_{R_h} - Y_h)(\hat{Y}_{R_j} - Y_j)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} V(\hat{Y}_{R_h}) + 2COV(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Y}_{R_j}) = \sum_{h=1}^{L} V(\hat{Y}_{R_h}) + 0$$

$COV(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Y}_{R_j}) = 0$ لان القياسات داخل كل طبقة لا تعتمد على قياسات الطبقة الاخرى ، وبما ان :

$$\because V[\hat{Y}_R] = N^2 \frac{(1-f)}{n}[\sigma_y^2 + R^2\sigma_x^2 - 2R\rho_{(xy)}\sigma_y\sigma_x]$$

$$\therefore V[\hat{Y}_{R_h}] = N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[\sigma_{y_h}^2 + R_h^2\sigma_{x_h}^2 - 2R_h\rho_{(x_h y_h)}\sigma_{y_h}\sigma_{x_h}]$$

$$\therefore V[\hat{Y}_{RS}] = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[\sigma_{y_h}^2 + R_h^2\sigma_{x_h}^2 - 2R_h\rho_{(x_h y_h)}\sigma_{y_h}\sigma_{x_h}]$$