مثال : في مدينة قسمت الفنادق فيها الى ثلاث طبقات حسب عدد الغرف التي تحتويها ، فاذا كان الهدف من الدراسة هو تقدير نسبة الغرف الشاغرة في هذه الفنادق ، والجدول الاتي يوضح النتائج التي تم الحصول عليها .

strata	N_h	n_h	Y_{hi} الغرف الشاغرة	Y_h	X_{hi} عدد الغرف
I (1-10) rooms	3	2	1,2,3	6	4,5,6
II (11-20) rooms	3	2	3,4,5	12	14,16,18
III (over 21) rooms	3	2	4,5,6	15	22,24,26
$\sum$	9	6		33	

X_h	y_{hi}	y_h	$\bar{y}_h$	x_{hi}
15	1,3	4	2	4,6
48	3,4	7	3.5	14,16
72	5,6	11	5.5	24,26
135		22		

x_h	$\bar{x}_h$	$\hat{R}_h$	$\hat{R}_h X_h$
10	5	4/10	5

30	15	7/30	11.2
50	25	11/50	15.84
90			33.04

1- مقدر النسبة المشترك :

$$\therefore \hat{R}_C = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} = \frac{\hat{Y}_{st}}{\hat{X}_{st}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{x}_h} = \frac{33}{135} = 0.25$$

2 – مقدر النسبة المنفصل :

$$\hat{R}_S = \frac{\sum_{h=1}^{L} \hat{R}_h X_h}{X} = \frac{33.04}{135} = 0.25$$

اما لإيجاد التباين لكلا المقدرين اعلاه نجد ان :

strata	$\sigma^2_{y_h}$	R^2	$\sigma^2_{x_h}$	$R^2\sigma^2_{x_h}$	ρ_h	$2R\ \rho_h\ \sigma_{x_h}\ \sigma_{y_h}$
I (1-10) rooms	1	0.06	1	0.06	1	0.5
II (11-20) rooms	1	0.06	4	0.24	1	1
III (over 21) rooms	1	0.06	4	0.24	1	1
Σ						

strata	$\sigma_{y_h}^2 + R^2\sigma_{x_h}^2 - 2R\rho_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h}$	R_h^2	$R_h^2\sigma_{x_h}^2$
I (1-10) rooms	0.56	0.16	0.16
II (11-20) rooms	0.24	0.06	0.24
III (over 21) rooms	0.24	0.04	0.16
$\sum$	1.04		

strata	$2R_h\ \rho_h\,\sigma_{x_h}\,\sigma_{y_h}$	$\sigma_{y_h}^2 + R_h^2\sigma_{x_h}^2 - 2R_h\,\rho_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h}$
I (1-10) rooms	0.8	0.36
II (11-20) rooms	1	0.24
III (over 21) rooms	0.8	0.36
$\sum$		0.96

$$\therefore V[\hat{R}_C] = \frac{1}{N^2}\frac{1}{\overline{X}^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[\sigma_{y_h}^2 + R^2\sigma_{x_h}^2 - 2R\rho_{(x_h y_h)}\sigma_{y_h}\sigma_{x_h}]$$

$$= 0.00076$$

$$\therefore V[\hat{R}_S] = \frac{1}{N^2}\frac{1}{\overline{X}^2}\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}[\sigma_{y_h}^2 + R_h^2\sigma_{x_h}^2 - 2R_h\,\rho_{(x_h y_h)}\sigma_{y_h}\sigma_{x_h}]$$

$$= 0.000704$$

التقدير باستخدام الانحدار في المعاينة العشوائية الطبقية

يمكن ايجاد الوسط الحسابي الطبقي باستخدام الانحدار بأسلوبين وهما :-

الاول : الوسط الحسابي الطبقي المنفرد المقدر بطريقة الانحدار

$$\bar{y}_{LrS} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{Lrh}$$

حيث ان $(\bar{y}_{Lrh})$ الوسط الحسابي المقدر بطريقة الانحدار للطبقة (h) وصيغته الرياضية :

$$\because \bar{y}_{(Lr)} = \bar{y} - \beta\ (\bar{x} - \bar{X})$$

$$\therefore \bar{y}_{(Lr)h} = \bar{y}_h - \beta_h\ (\bar{x}_h - \bar{X}_h)$$

وان تباين متوسط العينة الطبقية المنفرد والمقدر بطريقة الانحدار يكون بالصيغة الاتية :

$$V[\bar{y}_{LrS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h} [\sigma^2_{(y_h)} - 2\,\beta_h\ \sigma_{(xy)_h} + \beta_h^2\, \sigma^2_{(x_h)}]$$

الثاني : الوسط الحسابي الطبقي المشترك المقدر بطريقة الانحدار

$$\bar{y}_{(Lr)C} = \bar{y}_{st} - \beta\ (\bar{x}_{st} - \bar{X})$$

حيث ان :

$$\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h \quad , \quad \text{and} \quad \bar{x}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h$$

وان تباين متوسط العينة الطبقية المشترك والمقدر بطريقة الانحدار يكون بالصيغة الاتية :

$$V[\bar{y}_{LrC}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h} [\sigma^2_{(y_h)} - 2\,\beta\ \ \sigma_{(xy)_h} + \beta^2\ \sigma^2_{(x_h)}]$$

نظرية : في المعاينة العشوائية الطبقية ، اثبت ان :

$$E[\bar{y}_{LrS}] = \bar{Y}$$

Proof :

$$\because \bar{y}_{LrS} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{Lrh} \quad \Rightarrow E[\bar{y}_{LrS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h\ E[\bar{y}_{Lrh}]$$

$$\therefore E[\bar{y}_{LrS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h \ E[\bar{y}_h - \beta_h \ (\bar{x}_h - \bar{X}_h)]$$

$$\therefore E[\bar{y}_{LrS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h [E(\bar{y}_h) - \beta_h \{E(\bar{x}_h) - \bar{X}_h\}]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h [\bar{Y}_h - \beta_h \{\bar{X}_h - \bar{X}_h\}]$$

$$\therefore E[\bar{y}_{LrS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h \ \bar{Y}_h \ = \bar{Y}$$

نظرية : اثبت ان

$$V[\bar{y}_{LrS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h} [\sigma^2_{(y_h)} - 2\,\beta_h \ \sigma_{(xy)_h} + \beta_h^2 \sigma^2_{(x_h)}]$$

Proof :

$$\because \bar{y}_{LrS} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{Lrh} \quad \Rightarrow V[\bar{y}_{LrS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ V[\bar{y}_{Lrh}]$$

$$\because V[\bar{y}_{(Lr)}] = \frac{1-f}{n} [\sigma^2_{(y)} - 2\,\beta \ \sigma_{(xy)} + \beta^2 \sigma^2_{(x)}]$$

$$\therefore V[\bar{y}_{(Lr)h}] = \frac{(1-f_h)}{n_h} [\sigma^2_{(y)_h} - 2\,\beta_h \ \sigma_{(xy)_h} + \beta_h \sigma^2_{(x)_h}]$$

$$\therefore V[\bar{y}_{LrS}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \ \frac{(1-f_h)}{n_h} [\sigma^2_{(y)_h} - 2\,\beta_h \ \sigma_{(xy)_h} + \beta_h \sigma^2_{(x)_h}$$

نظرية : في المعاينة العشوائية الطبقية ، اثبت ان :

$$E[\bar{y}_{(Lr)C}] = \bar{Y}$$

Proof :

$$\because \bar{y}_{(Lr)C} = \bar{y}_{st} - \beta \ (\bar{x}_{st} - \bar{X})$$

$$\therefore E[\bar{y}_{(Lr)C}] = E[\bar{y}_{st}] - \beta \ \{E(\bar{x}_{st}) - \bar{X}\}$$

$$\because E[\bar{y}_{st}] = \bar{Y} \quad , \quad \text{and} \quad E(\bar{x}_{st}) = \bar{X}$$

$$\therefore E[\bar{y}_{(Lr)C}] = \bar{Y} - \beta\{\bar{X} - \bar{X}\} = \bar{Y}$$