نظرية : في المعاينة العشوائية الطبقية ، اثبت ان

$$\therefore V[\bar{y}_{LrC}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h} [\sigma^2_{(y_h)} + \beta^2 \ \sigma^2_{(x_h)} - 2\beta \ \ \sigma_{(xy)_h}]$$

Proof :

$$\because \bar{y}_{(Lr)C} = \bar{y}_{st} - \beta\ (\bar{x}_{st} - \bar{X})$$

$$\therefore V[\bar{y}_{(Lr)C}] = V[\bar{y}_{st} - \beta\ (\bar{x}_{st} - \bar{X})]$$

$$= V[\bar{y}_{st}] + V[\beta\ (\bar{x}_{st} - \bar{X})] - 2COV[\bar{y}_{st}\ ,\ \beta\ (\bar{x}_{st} - \bar{X})]$$

$$= V[\bar{y}_{st}] + \beta^2\ V[\bar{x}_{st}] + 0 - 2COV[\bar{y}_{st}\ ,\ \beta\ (\bar{x}_{st} - \bar{X})]$$

$$\bullet\ COV[\bar{y}_{st}\ ,\ \beta\ (\bar{x}_{st} - \bar{X})] = COV[\bar{y}_{st}\ ,(\beta\ \bar{x}_{st} - \beta\bar{X})]$$

$$= COV[\bar{y}_{st}, \beta\ \bar{x}_{st}] + COV[\bar{y}_{st}, -\beta\bar{X}]$$

$$* COV[\bar{y}_{st}, \beta\ \bar{x}_{st}] = E[\beta\ \bar{y}_{st}\ \bar{x}_{st}] - E[\bar{y}_{st}]E[\beta\ \bar{x}_{st}]$$
$$= \beta E[\ \bar{y}_{st}\bar{x}_{st}] - \beta E[\bar{y}_{st}]E[\ \bar{x}_{st}]$$

$$\therefore COV[\bar{y}_{st}, \beta\ \bar{x}_{st}] = \beta COV[\bar{y}_{st}\ ,\ \bar{x}_{st}]$$

$$* COV[\bar{y}_{st}, -\beta\bar{X}] = E[(\bar{y}_{st})(-\beta\bar{X})] - E(\bar{y}_{st})E(-\beta\bar{X})$$

$$\therefore COV[\bar{y}_{st}, -\beta\bar{X}] = -\beta\bar{X}\ E(\bar{y}_{st}) + \beta\bar{X}\ E(\bar{y}_{st}) = -\beta\bar{X}\ \bar{Y} + \beta\bar{X}\ \bar{Y} = 0$$
$$\Rightarrow COV[\bar{y}_{st}\ ,\ \beta\ (\bar{x}_{st} - \bar{X})] = \beta COV[\bar{y}_{st}\ ,\ \bar{x}_{st}]$$

$$\therefore V[\bar{y}_{(Lr)C}] = V[\bar{y}_{st}] + \beta^2\ V[\bar{x}_{st}] - 2\beta\ \ COV[\bar{y}_{st}\ ,\ \bar{x}_{st}]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h} \sigma^2_{(y_h)} + \beta^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}\ \sigma^2_{(x_h)} -$$

$$2\beta \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h}\ \sigma_{(xy)_h}$$

$$\therefore V[\bar{y}_{LrC}] = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(1-f_h)}{n_h} [\sigma^2_{(y_h)} + \beta^2\ \sigma^2_{(x_h)} - 2\beta\ \sigma_{(xy)_h}]$$

نتيجة : ان المجموع الكلي الطبقي المنفرد والمشترك المقدرين باستخدام الانحدار يكونان على التوالي بالصيغة الاتية :

$$\hat{Y}_{(Lr)S} = N\,\bar{y}_{(Lr)S}$$

$$\hat{Y}_{(Lr)C} = N\,\bar{y}_{(Lr)C}$$

مثال :

منطقة تنتج نوعاً من الثمار ويتم تسويق هذه الثمار في علب خاصة ، وعند التعبئة تقسم الثمار الى ثمار كبيرة وصغيرة ، ومن مجمل الانتاج وجد ان (500) علبة تحتوي على الثمار ذات الحجم الكبير ، و (1000) علبة تحتوي على الثمار ذات الحجم الصغير .

ولغرض تقدير المجموع الكلي للإنتاج في هذه المنطقة من الثمار سحبت عينة عشوائية مؤلفة من (10) علب ، (4) منها تحتوي على الثمار ذات الحجم الكبير ، و (6) علب تحتوي على الثمار ذات الحجم الصغير . ولقد اقترح ان يستخدم في التقدير على اساس وزن العلبة (x) وعدد الثمار الموجودة فيها (y) . وكانت النتائج كما في الجدول ادناه ، علماً انه ومن دراسة سابقة وجد ان متوسط وزن العلب لكلا الحجمين من الثمار هو $(\bar{X} = 11.5)$:

strata	I	y	55	36	40	22		
		x	11	12	13	11		
	II	y	50	54	58	55	52	54
		x	8	9	11	10	9	9

المطلوب جد :

1- الوسط الحسابي الطبقي المنفرد والمقدر بطريقة الانحدار على اساس ان :

1) $\beta_1 = 1 , \beta_2 = 1.2$

2- الوسط الحسابي الطبقي المشترك عندما $(\beta = 2.5)$.

3− المجموع الكلي الطبقي المنفرد والمقدر بطريقة الانحدار .

الحل :

$$1-\because \bar{y}_{LrS}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_{Lrh} \quad ; \quad W_1=\frac{N_1}{N}=\frac{500}{1500}=0.33 \quad ,$$

$$\text{and } W_2=\frac{N_2}{N}=\frac{1000}{1500}=0.67$$

$$\because \bar{y}_{(Lr)h}=\bar{y}_h-\beta_h\ (\bar{x}_h-\bar{X}_h)\ ;\ \beta_1=1,\ \text{and}\ \ \beta_2=1.2$$

$$\therefore \bar{y}_{(Lr)1}=\bar{y}_1-\beta_1\ (\bar{x}_1-\bar{X}_1)\ =38.25-(1)(11.75-11.5)=38$$

$$\therefore \bar{y}_{(Lr)2}=\bar{y}_2-\beta_2\ (\bar{x}_2-\bar{X}_2)\ =53.8-(1.2)(9.33-11.5)=56.40$$

$$\therefore \bar{y}_{LrS}=(0.33)(38)+(0.67)(56.40)=50.33$$

$$2-\because \bar{y}_{(Lr)C}=\bar{y}_{st}-\beta\ (\bar{x}_{st}-\bar{X})$$

$$\bar{y}_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h=W_1\bar{y}_1+\ W_2\bar{y}_2=(0.33)(38.25)+(0.67)(53.8)$$
$$=48.67$$

$$\bar{x}_{st}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{x}_h=W_1\bar{x}_1+\ W_2\bar{x}_2=(0.33)(11.75)+(0.67)(9.33)$$
$$=10.13$$

$$\therefore \bar{y}_{(Lr)C}=48.67-(2.5)\ (10.13-11.5)=52.10$$

$3-\ \hat{Y}_{(Lr)S}=N\ \bar{y}_{(Lr)S}=(1500)(50.33)=75495$ ثمرة

$\text{and}\ \ \hat{Y}_{(Lr)C}=N\ \bar{y}_{(Lr)C}=(1500)(52.10)=78150$ ثمرة

المعاينة العشوائية الطبقية لنسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة

في بعض الدراسات يكون لدينا مجتمع مقسم الى طبقات وان الهدف من الدراسة هو تقدير نسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة ، وكمثال على ذلك اذا اردنا ايجاد نسبة الطلبة الذين يرتدون نظارات في كلية ما ، وكما هو معروف ان نسبة الطلاب الذين يرتدون النظارات يزداد كلما تقدم الطلاب الى المراحل العليا .

فاذا افترضنا ان (P) تمثل نسبة الطلاب الذين يرتدون نظارات في كلية العلوم (المجتمع) ، وان (P_1, P_2, P_3, P_4) تمثل نسب الطلاب الذين يرتدون نظارات في المراحل الاربعة ، عندئذ يتم تقسيم المجتمع الى اربعة طبقات بحيث ان :

N_h : حجم الطبقة (h) في المجتمع .

n_h : حجم الطبقة (h) في العينة .

A_h : عدد المفردات التي تمتلك صفة معينة في الطبقة (h) في المجتمع .

a_h : عدد المفردات التي تمتلك صفة معينة في الطبقة (h) في العينة .

P_h :نسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة في الطبقة (h) في المجتمع.

p_h : نسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة في الطبقة (h) في العينة .

بحيث ان :

$$P_h = \frac{A_h}{N_h} \quad , \quad \text{and} \quad p_h = \frac{a_h}{n_h}$$

ان تقدير نسبة المفردات التي تمتلك صفة معينة في العينة الطبقية هو :

$$p_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h p_h}{N}$$

وان النسبة الحقيقية هي :

$$P = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h P_h}{N}$$