احصاء حيوي

الكورس الثاني

(موضوع المحاضرة)

تحليل بيانات البقاء على قيد الحياة

Dr.Safwan Nathem Rashed

مقدمة

ان تحليل بيانات البقاء على قيد الحياة توضح الطرائق الاحصائية التي تُستخدم في تحليل البيانات التي تخص البقاء على قيد الحياة.

ويمكن تعريف بيانات البقاء على قيد الحياة هي عبارة عن بيانات تخص او تقيس الفترة الزمنية من الولادة الى الوفاة او من تاريخ ظهور اعراض المرض الاولى ثم العلاج الى تاريخ ظهور اعراض المرض مرة ثانية او حدوث حالة حرجة وهذا بالنسبة الى الانسان او الحيوان.

اما بالنسبة الى المكائن والآلات فان وقت البقاء يمثل الوقت من تاريخ تشغيل الالة الى تاريخ عطلها او توقفها عن العمل.

ان وقت البقاء على قيد الحياة هو متغير عشوائي قد يكون مستمر او متقطع وهذا المتغير يمتلك توزيع تكراري وان هذا التوزيع يتميز بواسطة ثلاثة دوال احتمالية هي:

١ – دالة الوفاة الاحتمالية $f(t)$.

Death density function

٢ –دالة البقاء الاحتمالية $S(t)$.

Survival density function

٣ –دالة المخاطرة او الخطورة الاحتمالية $\lambda(t)$.

Hazard density function

١ – دالة الوفاة الاحتمالية $f(t)$:Death density function

هي عبارة عن احتمال وفاة المفردة خلال $(t, t+\Delta t)$

ومهما كانت قيمة (Δt) صغيرة وان التعريف الرياضي هو

$$\boxed{f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t \le x \le t + \Delta t)}{\Delta t}}$$

ومن خصائص $f(t)$ هي:

$$1 - f(t) \ge 0$$

$$2 - \sum f(t) = 1 \text{ or } \quad \int f(t)\,dt = 1$$

$$3 - 0 \le f(t) \le 1$$

٢–دالة البقاء الاحتمالية $S(t)$: Survival density function

هي احتمال بقاء المفردة على قيد الحياة على الاقل (Δt) من الوقت وان التعريف الرياضي هو

$$
\begin{aligned}
S(t) &= p(X > t) \\
&= 1 - p(X \le t) \\
&= 1 - F(t)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du \quad ; \text{or} \quad F(t) = \sum_{u=-\infty}^{t} f(u)
$$

احتمال ان تموت المفردة قبل t ، $F(t)$.

٣–دالة المخاطرة او الخطورة الاحتمالية $\lambda(t)$.

Hazard density function

وهي احتمال وفاة المفردة خلال الفترة $(t, t + \Delta t)$ اي ان

احتمال ان المفردة التي عاشت على الاقل وقت (t) تموت فلال

الفترة $(t + \Delta t)$وان دالة الخطورة عبارة عن دالة الوفاة الشرطية

وتعرف بالصيغة الرياضية الاتية:

$$\boxed{\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t \leq x \leq t + \Delta t / x > t)}{\Delta t}}$$

العلاقة بين الدوال الاحتمالية الثلاثة

حيث توجد علاقة رياضية مرتبطة بين الدوال الاحتمالية التي تأخذ الصيغ الرياضية الاتية:

$$1- f(t) = -S'(t) \quad \therefore S'(t) = \frac{\partial u}{\partial t} S(t)$$

$$2- S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}$$

$$3- \lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

العلاقة بين الدوال الاحتمالية الثلاثة

Proof/

$$1 - f(t) = -S'(t)$$

$$S(t) = p(X > t) = 1 - p(X \le t)$$

$$= 1 - F(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} S(t) = \frac{\partial u}{\partial t}\left(1 - F(t)\right)$$

$$S'(t) = -F'(t) = -f(t)$$

$$\therefore f(t) = -S(t)$$

Proof/

$$2 - S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}$$

proof /

$$f(t) = -S'(t)$$

$$\lambda(t) = \frac{-S'(t)}{S(t)}$$

by taking the integration of the two sides

$$\int_0^t \lambda(u)\,du = \int_0^t \frac{-S'(u)}{S(u)}\,du$$

Proof/

$$\int_0^t \lambda(u)\,du = -Ln\left(S(t)\right) \quad ; by\ beating\ both\ sides\ (-1)$$

$$Ln\left(S(t)\right) = -\int_0^t \lambda(u)\,du \quad ; by\ EXP.$$

$$e^{Ln\left(S(t)\right)} = e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}$$

$$\therefore S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}$$

Proof/

$$3-\lambda(t)=\frac{f\,(t)}{S\,(t)}$$

$$\lambda(t)=\frac{-S'(t)}{S\,(t)}=\frac{-F'(t)}{S\,(t)}$$

$$\therefore\ \lambda(t)=\frac{f\,(t)}{S\,(t)}$$

ويمكن حساب الدوال بشكل **كمي** على النحو الاتي:

دالة الوفاة $f(t)$	عدد المتوفين في كل فئة
	عدد الباقين في الفئة الاولى
دالة البقاء $S(t)$	عدد الباقين على قيد الحياة في الفئة
	عدد الباقين في الفئة الاولى
دالة الخطورة $\lambda(t)$	دالة الوفاة
	دالة البقاء
مركز الفئة لدالة البقاء $S(t)$	عدد الباقين على قيد الحياة في بداية الفئة – ٠.٥ عدد المتوفيين في نفس الفئة
	عدد الباقين على قيد الحياة الاصلي

مثال:

البيانات الاتية تمثل البقاء على قيد الحياة لمجموعة من المرضى مصابين بمرض معين:

المطلوب حساب كل من ($f\,(\mathrm{t})$ ، $S\,(\mathrm{t})$ ، $\lambda(\mathrm{t})$) ثم ارسم المدرج التكراري لعدد الباقين على قيد الحياة وعدد المتوفين في الفئة وحدد المنحنى الذي يمثل دالة البقاء ودالة الوفاة ثم ارسم دالة الخطورة.

وقت البقاء على قيد الحياة	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-فاكثر
عدد الباقين على قيد الحياة	100	70	45	40	30	20	10	5	2

Sol/

وقت البقاء على قيد الحياة	عدد الباقين على قيد الحياة	عدد المتوفين في كل فئة	$f(t)$	$S(t)$	$\lambda(t)$	مركز كل فئة $S(t)$
0-1	100	100-70=30	30/100=0.30	100/100=1	0.30/1=0.30	0.85
1-2	70	70-45=25	25/100=0.25	70/100=0.70	0.25/0.70=0.36	0.575
2-3	45	45-40=5	5/100=0.05	45/100=0.45	0.05/0.45=0.111	0.425
3-4	40	40-30=10	10/100=0.1	40/100=0.40	0.1/0.40=0.25	0.35
4-5	30	30-20=10	10/100=0.1	30/100=0.30	0.1/0.30=0.333	0.25
5-6	20	20-10=10	10/100=0.1	20/100=0.20	0.1/0.20=0.5	0.15
6-7	10	10-5=5	5/100=0.05	10/100=0.10	0.05/0.10=0.5	0.075
7-8	5	5-2=3	3/100=0.03	5/100=0.05	0.03/0.05=0.6	0.035
8-فاكثر	2	2-0=2	2/100=0.02	2/100=0.02	0.02/0.02=1	لا توجد مركز فئة اخيرة

تحسب مراكز كل فئة على النحو الاتي:

$$S(t=(0-1)) = \frac{100-\frac{1}{2}(30)}{100} = \frac{85}{100} = 0.85$$

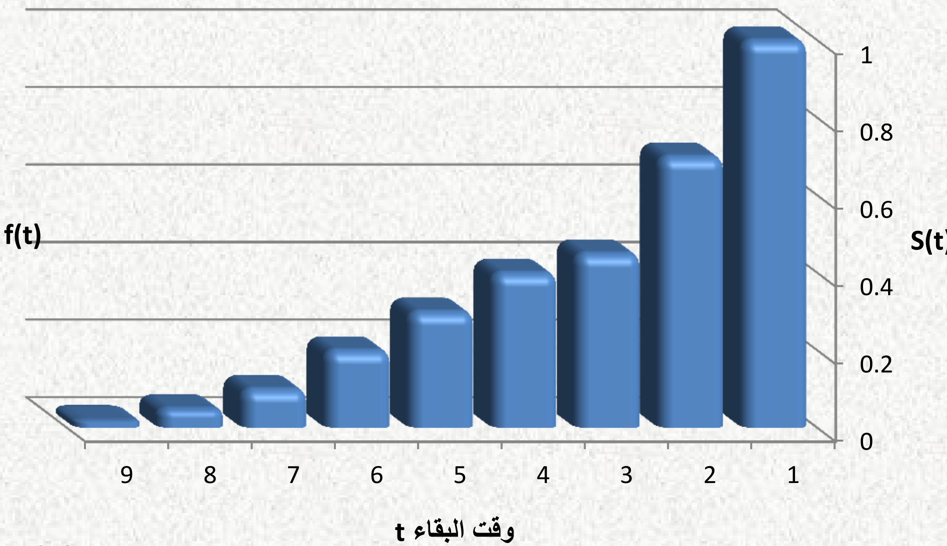
$$S(t=(1-2)) = \frac{70-\frac{1}{2}(25)}{100} = \frac{57.5}{100} = 0.575$$

$$S(t=(2-3)) = \frac{45-\frac{1}{2}(5)}{100} = \frac{42.5}{100} = 0.425$$

f(t)


0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
f(t)
9 8 7 6 5 4 3 2 1
وقت البقاءt

S(t)


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
S(t)
9 8 7 6 5 4 3 2 1
وقت البقاء t

λ(t)


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
λ(t)
9 8 7 6 5 4 3 2 1
وقت البقاء t

مثال:

البيانات الاتية تمثل البقاء على قيد الحياة لمجموعة من المرضى مصابين بمرض معين:

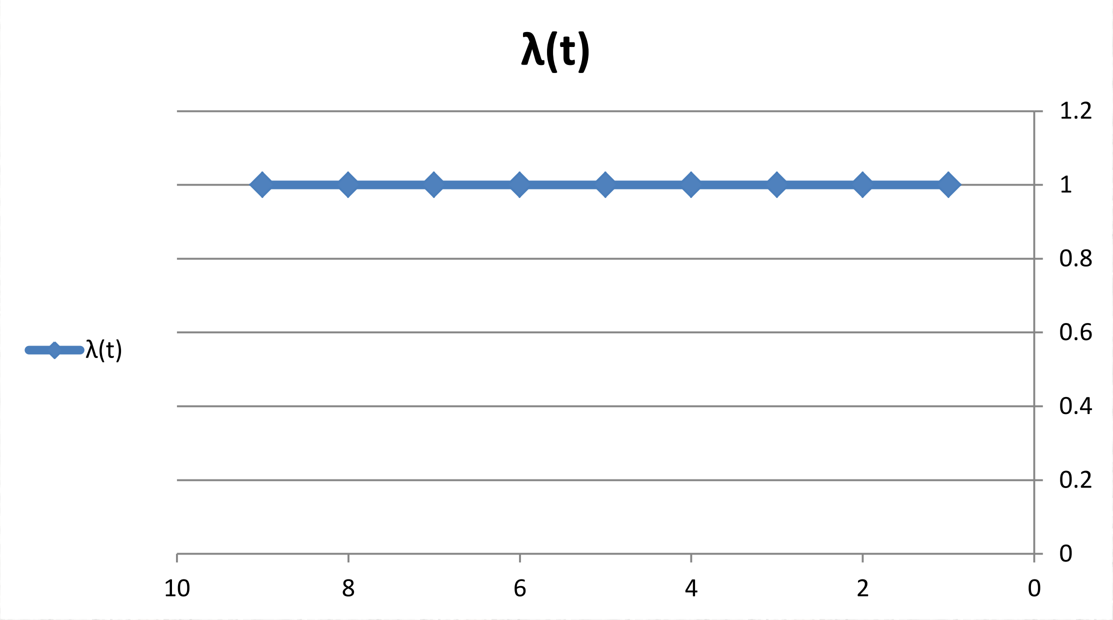
المطلوب حساب كل من $(f(t)$ ، $S(t)$ ، $\lambda(t))$ ثم ارسم المدرج التكراري لعدد الباقين على قيد الحياة وعدد المتوفين في الفئة وحدد المنحنى الذي يمثل دالة البقاء ودالة الوفاة ثم ارسم دالة الخطورة.

فاكثر-4	3-4	2-3	1-2	0-1	وقت البقاء على قيد الحياة
0	40	100	150	200	عدد الباقين على قيد الحياة

اشكال دالة الخطورة

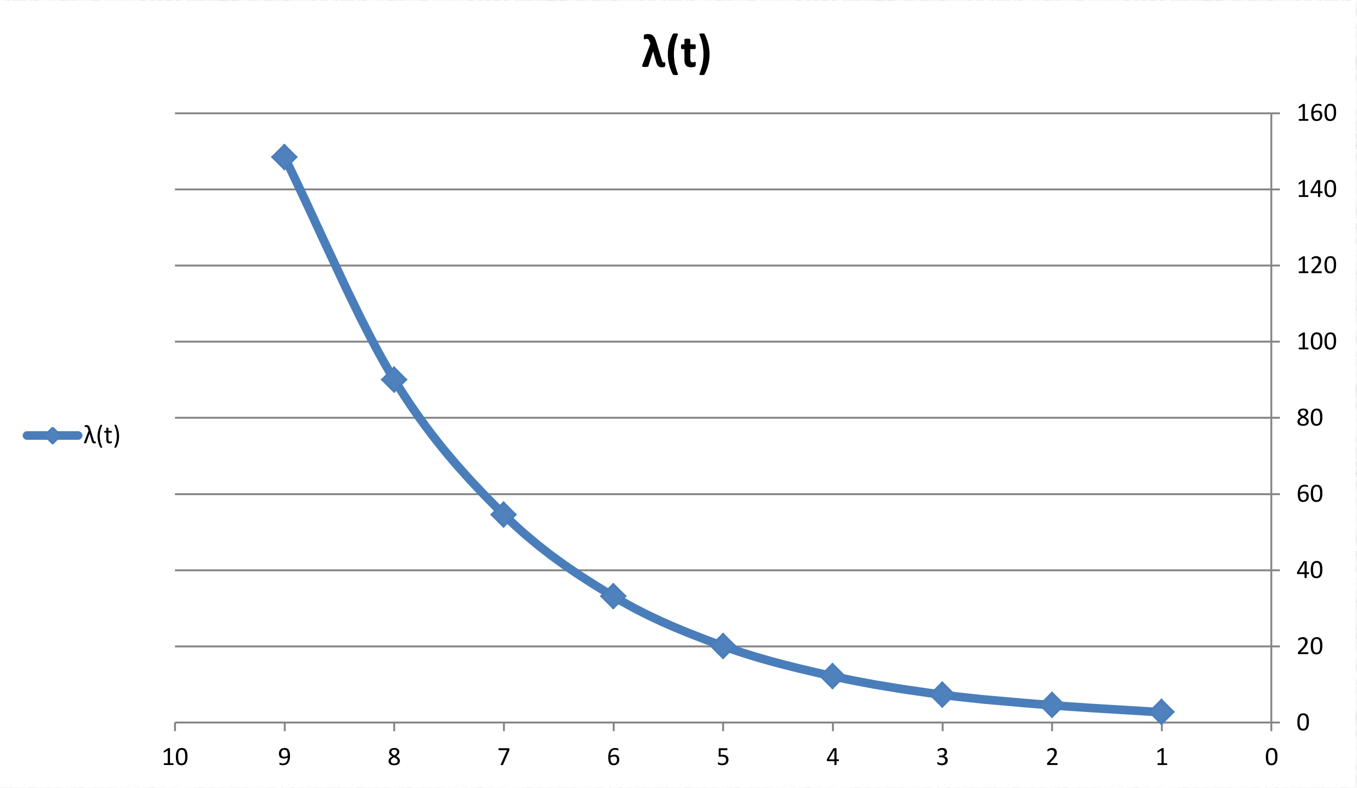
ان دالة الخطورة تأخذ اشكالاً مختلفة حيث ان كل شكل يقودنا الى توزيع تكراري معين وان شكل دالة الخطورة يحدد الخطورة التي يتعرض لها المجتمع او مجموعة من المفردات ان الاشكال الشائعة لدالة الخطورة اربعة وهي:

١ – الشكل الثابت: Constant Shape



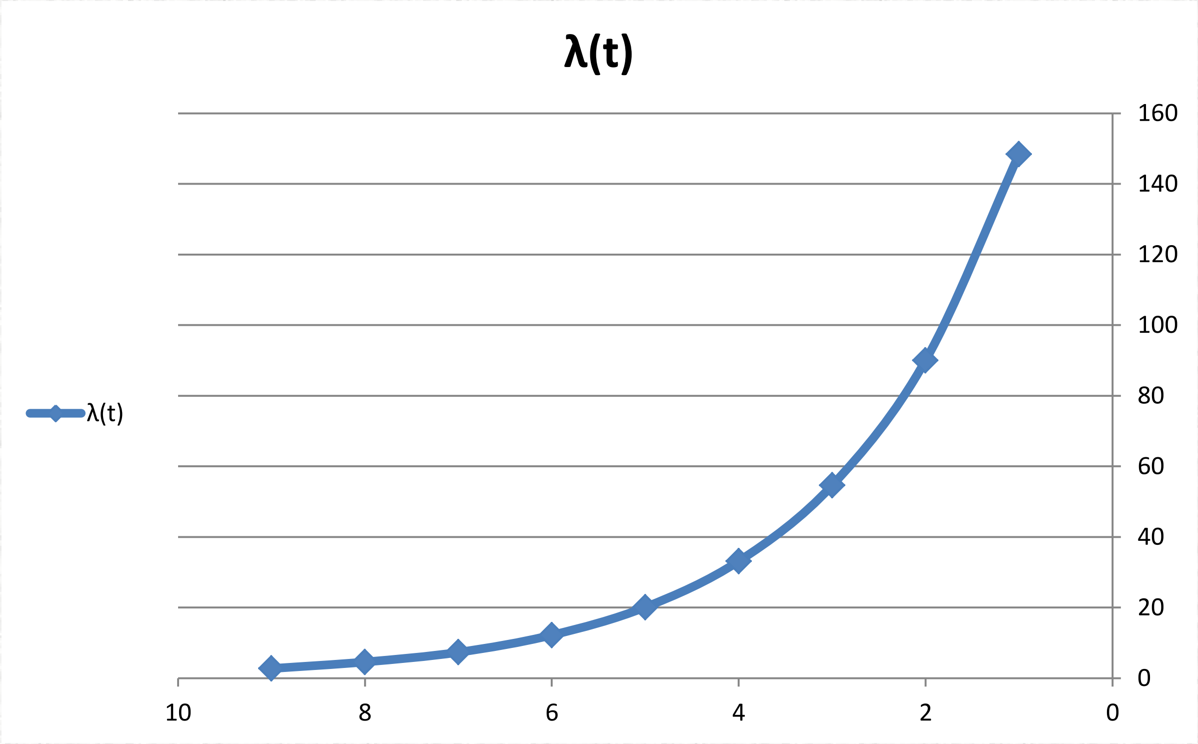
اشكال دالة الخطورة

٢ – الشكل المتزايد: Increasing Shape



اشكال دالة الخطورة

٣– الشكل التناقص: Decreasing Shape



اشكال دالة الخطورة

٤ – الشكل J :