احصاء حيوي

الكورس الثاني

(موضوع المحاضرة)

اختبارات تتعلق بالانحراف المعياري والتباين

Dr.Safwan Nathem Rashed

اختبارات تتعلق بالانحراف المعياري والتباين ويقسم الى:

١. اختبار تباين مجتمع طبيعي.
٢. اختبار تجانس تباينيين بين تقديرين مستقلين.

في هذا الموضوع سوف يتم التطرق الى دراسة الاختبارات الخاصة بالانحراف المعياري والتباين من خلال اختبار تباين المجتمع الطبيعي ذات تباين مجهول وتجانس تباينيين.

- حيث تم توضيح سابقاً ان التجانس ينقسم الى:

١. تجانس من حيث الصفة المدروسة في اي مسألة مطلوب دراستها.
٢. تجانس من حيث القيمة (الكمية) إن كانت كبيرة او صغيرة في مجتمعين لهما تباين، عند توفر صفة التجانس في النقطة الاولى.

١-اختبار تباين مجتمع طبيعي

افرض ان $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تمثل مشاهدات عينة عشوائية قوامها (n) من المفردات تم اختيارها من مجتمع مفرداته تتوزع توزيعاً طبيعياً بتباين σ^2 وان σ^2 مجهولة.

وأفترض ان S^2 تمثل تباين العينة علماً اننا في اختبار تباين مجتمع طبيعي تتوفر فيه قيمة اولية معينة σ_0^2 ،اما ان تكون هذه القيمة الاولية هي التي تمثل تباين المجتمع الطبيعي او لا ، فان فرضية العدم تصاغ بالشكل الاتي:

$$\boxed{H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2}$$

حيث ان:

σ_0^2 : تمثل قيمة معطاة.

فلاختبار هذه الفرضية ضد اي فرضية بديلة اخرى يتم الاعتماد على الاختبار الاحصائي الذي يكون دائماً ذات قيمة موجبة كالاتي:

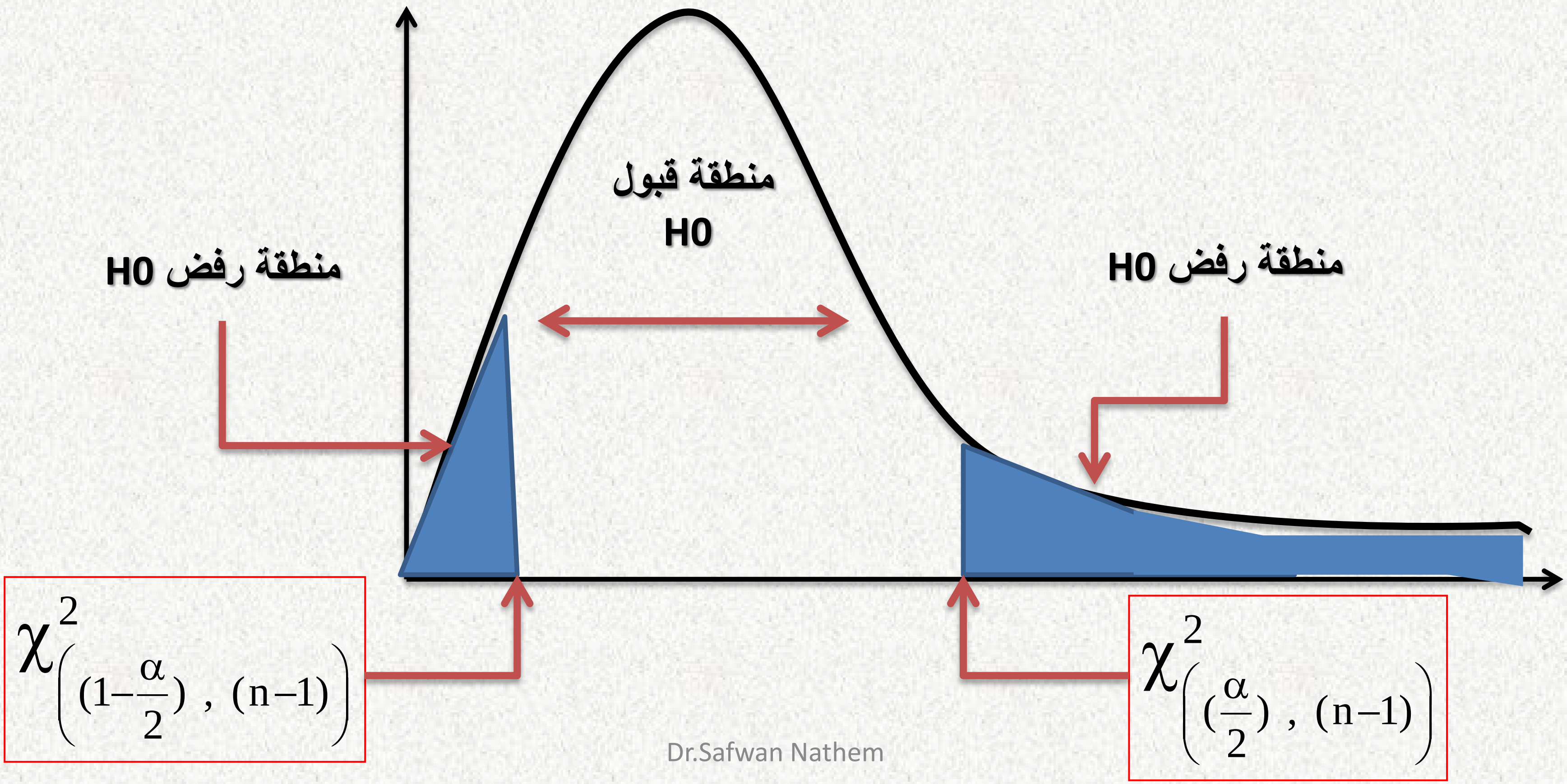
$$\therefore \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

حيث ان:

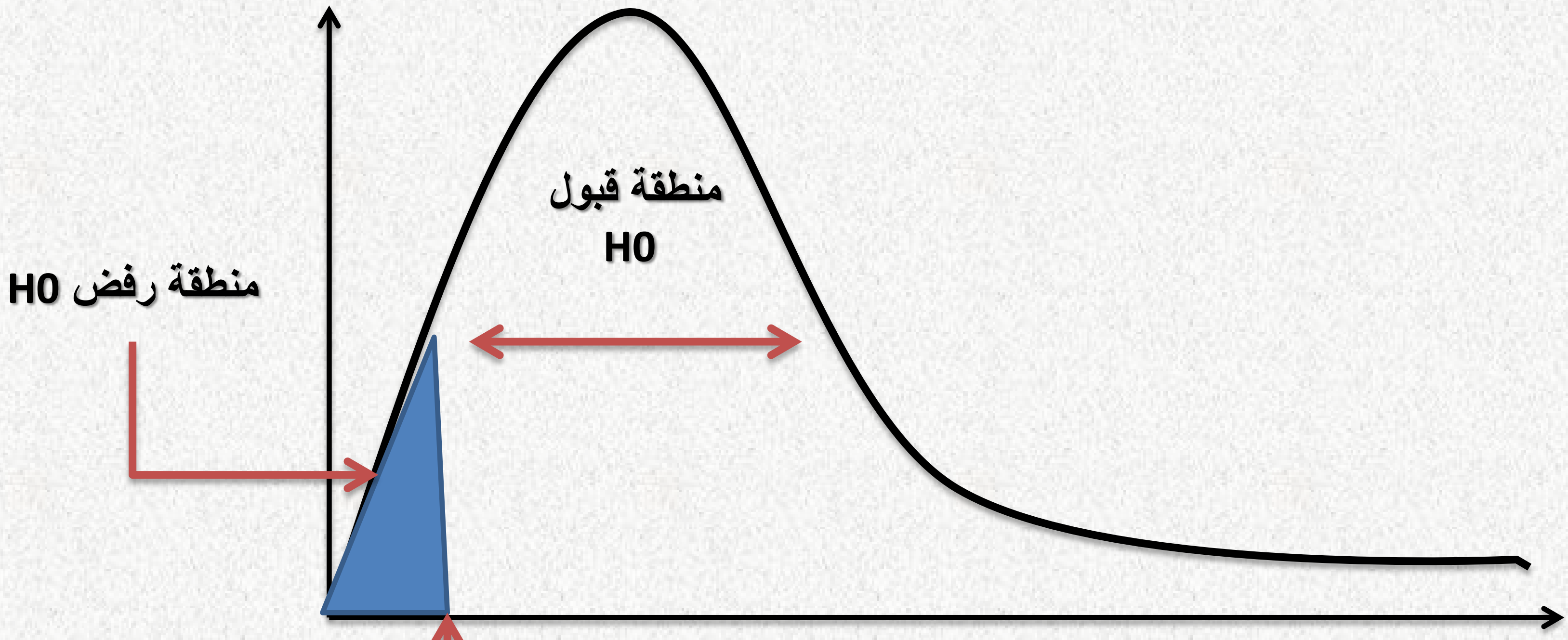
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

ولغرض توضيح كيفية اتخاذ القرار بشأن قبول او رفض فرضية العدم H0 لابد من تحديد الفرضية البديلة واشكالها الموضحة ادناه:

١. اذا كانت الفرضية البديلة هي: $\boxed{H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2}$

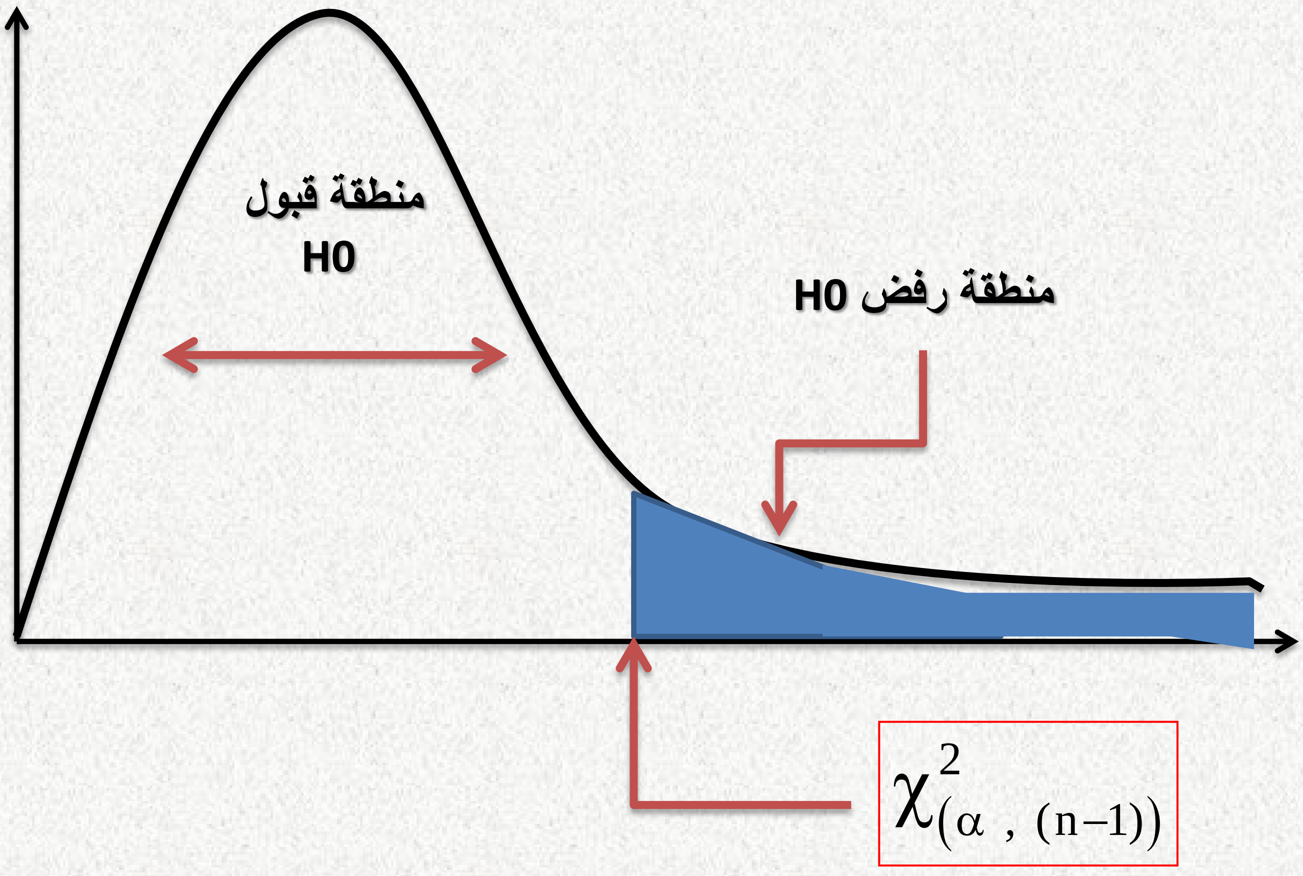


٢. اذا كانت الفرضية البديلة هي: $\boxed{H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2}$



$$\boxed{\chi^2_{((1-\alpha)\ ,\ (n-1))}}$$

١. اذا كانت الفرضية البديلة هي: $\boxed{H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2}$



مثال:

في دراسة أجريت حول قوة شد نوع معين من الحبال تم اختيار عينة عشوائية من الحبال طول كل منها (١) متر وتم قياس قوة الشد لكل من القطع المختارة وحسب الانحراف المعياري لها فكانت (320) غم/١م. فاذا علمت ان عدد القطع المختارة من الحبال كانت (25) قطعة وان المواصفات الخاصة بالإنتاج المعتمدة توصي بان درجة الانحراف المعياري لقوة الشد هو (350) غم/١م. هل ان الانتاج مطابق للمواصفات تحت مستوى معنوية 5%.

Sol/

1−

$$H_0 : \sigma^2 = (350)^2 \leftarrow \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq (350)^2$$

2−

$$\alpha = 0.05 \qquad ; \quad V = n - 1 = 25 - 1 = 24$$

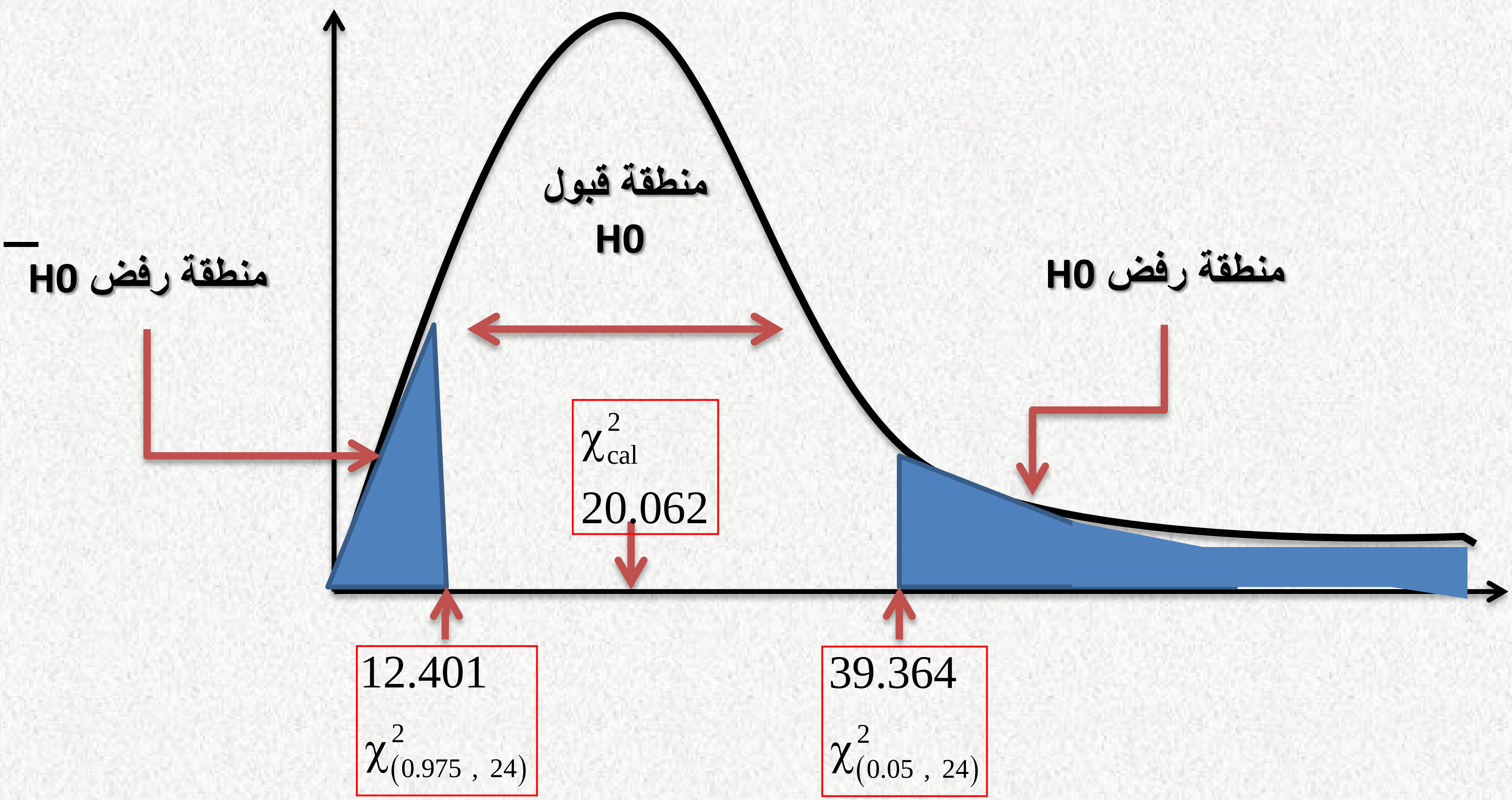
وبما ان الاختبار هنا من جانبين لذلك يجب ايجاد قيمة الجرجة من طرفين وعلى النحو الاتي:

$$\chi^2_{\left((\frac{\alpha}{2})\ ,\ (n-1)\right)} = \chi^2_{(0.025\ ,24)} = 39.364$$

$$\chi^2_{\left((1-\frac{\alpha}{2})\ ,\ (n-1)\right)} = \chi^2_{(0.975\ ,24)} = 12.401$$

$$3-\ \chi^2_{cal} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)(320)^2}{(350)^2} = 20.062$$

4–



6-

القرار:

نلاحظ ان القيمة المحسوبة تقع بين $\chi^2_{\left((1-\frac{\alpha}{2})\,,\,(n-1)\right)} \le \chi^2_{cal} \le \chi^2_{\left((\frac{\alpha}{2})\,,\,(n-1)\right)}$

اي ان $12.401 \le 20.062 \le 39.364$ **فضلاً عن ان القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول لـ H_0 تحت المنحنى وهذا يدل على رفض الفرضية البديلة والتمسك بفرضية العدم ، ان الموصفات الخاصة بالإنتاج مطابقة للموصفات المطلوبة عند مستوى معنوية 5%.**

مثال:

في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية لوحظ من خلال الخبرة السابقة بان الانحراف المعياري لعمر المصابيح المنتجة هو (180) ساعة، ولغرض التأكد من نوعية المنتج لايزال كما هو تم اختيار عينة عشوائية من هذه المصابيح وبحجم (51) مصباح وتم فحصها، حيث لوحظ ان الانحراف المعياري او القياسي لبيانات عمر المصباح الخاصة بالعينة كانت (205) ساعة، هل تعتقد بان إنتاج هذا المصنع حافظ على جودته بشكل اكبر عند مستوى معنوية 5%.

Sol/

1-
$$H_0 : \sigma^2 = (180)^2 \leftarrow \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 > (180)^2$$

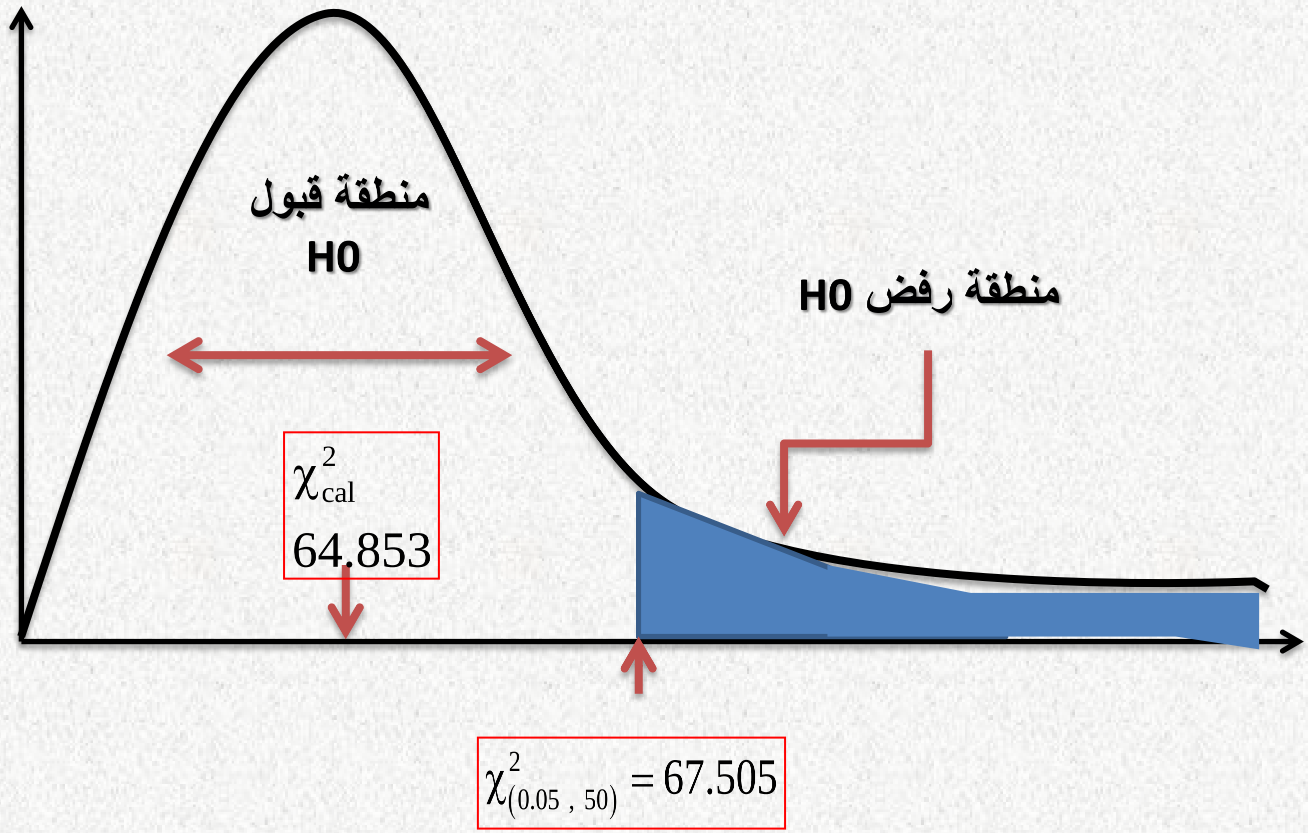
2- $\alpha = 0.05 \quad ; \quad V = n-1 = 51-1 = 50$

ويما ان الاختبار هنا من جانب واحد لذلك يجب ايجاد قيمة الجرجة من طرف اليمين وعلى النحو الاتي:

$$\chi^2_{(\alpha\ ,\ (n-1))} = \chi^2_{(0.05\ ,50)} = 67.505$$

3-
$$\chi^2_{cal} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(51-1)(205)^2}{(180)^2} = 64.853$$

4-



٥- القرار: نلاحظ ان القيمة المحسوبة تقع في منطقة قبول فرضية العدم H_0 تحت المنحنى وهذا يدل على رفض الفرضية البديلة والتمسك بفرضية العدم ، مما يدل على انه لا يوجد فرق جوهري في زيادة عمر المصباح عند مستوى معنوية 5%.

٢-اختبار تجانس تباينيين بين تقديرين مستقلين.

لنفرض وجود مجتمعين طبيعيين ذات تباينين مجهولين $\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2\right)$، المجتمع الاول تم سحب عينة عشوائية منه بحجم (n_1) وبتباين $\left(S_1^2\right)$. وكذلك تم سحب عينة عشوائية من المجتمع الثاني بحجم (n_2) وبتباين $\left(S_2^2\right)$ ، وعلى فرض ان العينتان مستقلتان الوحدة عن الاخرى، واننا بصدد اختبار الفرضية القائلة بان العينتان المسحوبتان من مجتمعين طبيعيين متساوٍ، اي انهما متجانسين، فان الفرضية الخاصة بالاختبار الاكثر ملائمة هو:

$$\boxed{H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2}$$

ضد اي فرضية بديلة اخرى

ملاحظة مهمة: اذا كانت

$$\chi_1^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \quad ; \quad \chi_2^2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}$$

يتبعان توزيع χ^2 بدرجة حرية (n_1-1)،(n_2-1) على التوالي فان:

$$F_{cal} = \frac{\chi_1^2 / d.f_1}{\chi_2^2 / d.f_2} = \frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2(n_1 - 1)}}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2(n_2 - 1)}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

لذلك فان: اذا كانت $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ، فضلاً عن $S_1^2 > S_2^2$ فان المعيار الاحصائي هو:

$$\therefore F_{cal} = \frac{S_1^2}{S_2^2} > 1 \sim F(\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1) \quad ; \quad S_1^2 > S_2^2$$

حيث يتم مقارنة قيمة F المحسوبة مع القيمة الجدولية التابعة للجداول الاحصائية لـ F لغرض اتخاذ القرار بقبول او رفض فرضية العدم H_0.

مثال:

في تجربة معينة لمقارنة أثر نوعين من الغذاء (A,B) في زيادة وزن مجموعتين من الابقار تم تخصيص النوع A لعينة قوامها (8) ابقار وتم تخصيص النوع B لعينة اخرى بنفس العدد، وبعد مضي فترة تم حساب مقدار الزيادة في وزن كل بقرة وكان التباين لمقدار الزيادة العائد للعينة الخاصة بالغذاء A هو (5.382) وان التباين لمقدار الزيادة الخاصة بالغذاء B هو (10.563)، اختبر الفرضية القائلة بأنه لا يوجد فرق بين تبايني الاوزان العائد لكل من الغذاء (A,B) عند مستوى معنوية 1%.

Sol/

1− $\boxed{H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \quad ; \quad H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2}$

حيث ان $S_A^2 < S_B^2$ فان المختبر الاحصائي هو

2− $\boxed{F_{(\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1)} = F_{(0.01, 7, 7)} = 3.79}$

3− $\boxed{F_{cal} = \frac{S_B^2}{S_A^2} = \frac{10.563}{5.382} = 1.963 > 1 \quad ; \quad S_B^2 > S_A^2}$

4−

قرار:

نلاحظ ان $F_{cal} < F_{table}$ اي ان $(1.963 < 3.79)$ وهذا يدل على القبول بفرضية العدم H_0 ورفض الفرضية البديلة H_1 على انه لا يوجد فرق بين التباينين اي متجانسين في زيادة الوزن عند مستوى معنوية 1%.

مثال:

في احدى المدارس تم تغذية مجموعة من الطلبة بنوع معين من الحليب بينما المجموعة الثانية لم يتم تغذيتها بهذا النوع من الحليب، وتم الحصول على المعلومات الموضحة ادناه بعد قياس اوزان المجموعتين، هل كان تباين المجموعة الاولى ذات زيادة اكبر من المجموعة الثانية عند مستوى معنوية 5%.

	n	S^2
المجموعة الاولى	10	7.211
المجموعة الثانية	9	1.750

Sol/

1− $$\boxed{H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad ; \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2}$$

حيث ان $S_1^2 > S_2^2$ فان المختبر الاحصائي هو

2− $$\boxed{F_{(\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1)} = F_{(0.05, 9, 8)} = 3.39}$$

3− $$\boxed{F_{cal} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{7.211}{1.750} = 4.121 > 1 \quad ; \quad S_1^2 > S_2^2}$$

4−

قرار:

نلاحظ ان $F_{cal} > F_{table}$ اي ان (4.121>3.39) وهذا يدل على القبول بالفرضية البديلة H_1 ورفض فرضية العدم H_0 على انه يوجد فرق اكبر بين التباينين اي غير متجانسين في زيادة الوزن عند مستوى معنوية 5%.