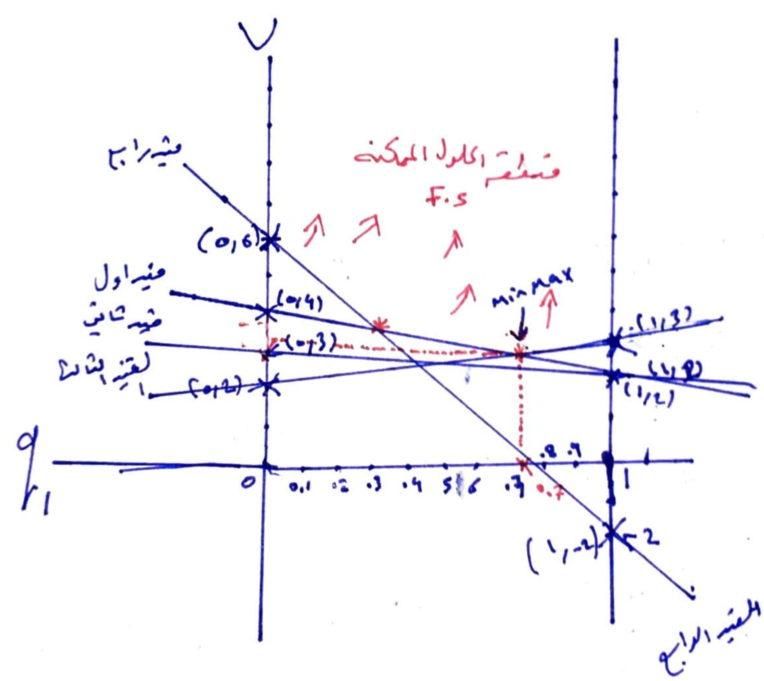
$$E(B|A_3) = q_1 + 2 \geq V \Rightarrow (0,2),(1,3)$$

$$E(B|A_4) = -8q_1 + 6 \geq V \Rightarrow (0,6)\ (1,-2)$$

بعد الحصول على النقاط الخاصة بكل الشيود نقوم بتمثيلها على الرسم البياني

	النقاط	
	$q_1=0$ V	$q_1=1$ V
القيد الأول	(0, 4)	(1, 2)
القيد الثاني	(0, 3)	(1, 2)
القيد الثالث	(0, 2)	(1, 3)
القيد الرابع	(0, 6)	(1, -2)



$$q_1 = 0.7 \Rightarrow q_2 = 0.7$$

$$V = 2.7 \xrightarrow{\text{للتأكد}}$$

للتأكد نأخذ أي معادلة (قيد) ونعوض قيمة q_1 ونوجد قيمة V مثلاً للقيد الثالث.

$$q_1 + 2 = V$$

$$0.7 + 2 = V \Rightarrow \boxed{V = 2.7}$$

طريقة المعادلات الخطية linear equations method

في هذا الطريقة يشرط ان تكون مصفوفة الدفع مربعة ولتوضيح هذا الطريقة من خلال المثال الاتي :

	B1	B2	B3	Min	MaxMin
A1	0	5	2	0	
A2	5	1	0	0	
A3	1	3	4	1	1
Max	5	5	4		
MinMax			4		

MaxMin=1 ≠ MinMax=4

Then

$MaxMin \le V \le MinMax$

$1 \le V \le 4$

ملاحظة :

في هذا الطريقة نعتمد على منطق السوال فاذا كان إيجاد الستراتيجيات المثلى لكى اللاعبيين فانه بالنسبة للاعب A يختار الستراتيجيات A1 A2 A3 باحتمالات p1 p2 p3 على التوالي وبافتراض ان اللعب B سوف يختار الستراتيجيات المثالى المتاحه له فانه يمكن التعبير عن المعادلات الخطية للمتنافس A كما موضح

E(A|B1)=5p1 +p3 =V

E(A|B2)=5p1+p2+3p3=V

E(a|B3)=2p1+ +4p3=V

من   المعادلات أعلاه نلاحظ ان الربح المتوقع ل Aتم التعبير عنه بواسطة ثلاثة معادلات خطية واربع متغيرات غير معلومة ولحل مثل هذه المعادلات فانة يجب تقليل عدد المتغيرات الى ثلاث متغيرات وذلك بالاستعانة بالمعادلات الاتية

$P1+p2+p3 = 1$

$P1= 1-p2-p3$

وبالتعويض لقيمة p1 نحصل

$-5p2- p3 +V=0$ ----------- 1

$5(1-p2-p3) + p2 + 3p3 = V$

$5-5p2-5p3 + p2 +3p3=V$

$5-4p2-2p3=V$

$4p2 +2p3+V=5$-----------------2

$2(1-p2-p3)+4p3 =V$

$2-2p2-2p3+4P3=V$

$2-2p2+2p3=V$

$2p2-2p3+V=2$ -------------------3

$5p2- p3 +V=0$ ----------- 1

$4p2 +2p3+V=5$ -------------2

$2p2-2p3+V=2$ ----------------3

بالتشبية واستخدام كرامر

A P = B

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p2 \\ p3 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{-30} = \frac{11}{30}$$ احتمال لعب اللاعب الأول للاستراتيجة الثانية

$$P3 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-17}{-30} = \frac{17}{30}$$ احتمال لعب اللاعب الأول للاستراتيجة الثالثة

P1=1 -11/30 -17/30 = 2/30 احتمال لعب اللاعب الأول للاستراتيجة الاولى

$$v = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-72}{-30} = \frac{72}{30}$$ قيمة المبارة لكلى اللاعبين

اذن الربح المتوقع ل A هو 72/30 وهو اكبر او اقل من 4 وهوايضا يمثل قيمة المباراة وبنفس الأسلوب نستخرج الخسارة المتوقعة للمتنافس B .

الستراتيجيات	المعادلات
$E(B\|A1)=$	$0 + 5q1 + 2q3 = V$ ---------- 1
$E(B\|A2)=$	$5q1+q2+0 = V$ -----------2
$E(B\|A3)=$	$q1 + 3q2 + 4q3 = V$ -----------3

وبما ان مجموع الاحتمالات $q1+q2+q3 = 1$ فان $q1=1-q2-q3$

$-5q2-2q3 + V=0$

$4q2+5q3 + V=5$

$-2q2-3q3+V=1$

$$q2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-30} = \frac{12}{30}$$ احتمال لعب اللاعب الثاني للاستراتيجة الثانية

$$q3 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-30} = \frac{6}{30}$$ احتمال لعب اللاعب الثاني للاستراتيجة الثالثة

q 1 = 1- q2-q3 = 1- 12/30 -6/30 = 12/ 30 احتمال لعب اللاعب الثاني للإستراتيجية الأولى

$$V = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-72}{-30} = \frac{72}{30}$$ قيمة المبارة والتي تكون متساوية لكى اللاعبين

طريقة جبر المصفوفات Matrix algebra method

تستخدم هذا الطريقة عندما تكون مصفوفة الدفع مربعة أي ان شكل المصفوفة

$$G = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \cdots & \cdots & a2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ am1 & am2 & \dots & \dots & amn \end{bmatrix}$$

ويتم إيجاد استراتيجيات المتجة الأول للاعب A عن طريق متجة احادي افقي ابعاده بعدد المصفوفة G أي من خلال القانون الاتي :

Prob.stratgy A = $\frac{(1,\dots\dots\dots,1)_{1*n}\, Adj\, G}{(1,\dots\dots\dots,1)_{1*n}\, Adj\, G\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}_{m*1}}$

اما بالنسبة للاعب B

Prob.stratgy B = $\frac{(1,\dots\dots\dots,1)_{1*n}\, cof\, G}{(1,\dots\dots\dots,1)_{1*n}\, Adj\, G\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}_{m*1}}$

اما قيمة المباراة فهي

Game Value = $(stratgies\ of\ A) * G * (stratgies\ of\ B\ )^T$

حيث ان

Cof = cofactor

مصفوفة العوامل

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

$$cof\ G = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

اما Adj = adjoint فهو مدور مصفوفة العوامل Adj G = $(cof)^T$

ملاحظة : في بعض الأحيان تعطي نتائج غير منطقية لان المتجة قد يحوي على قيم سالبة او اكبر من الواحد ونحن نعلم بان المتجة الاحتمالي يعني محصور بين الصفر والواحد لذا في هاي الحالة نلجا الى البرمجة الخطية

مثال :::

استخدم جبر المصفوفات

	B1	B2	B3	Min	MaxMin
A1	2	3	4	2	2
A2	4	1	5	1	
Max	3	3	5		
MinMax	3				

أولا وفي كل مثال يمر علينا سواء طريقم جبر المصفوفات او طريقة المعادلات او طريقة البرمجه الخطيه نقوم باجراء طريقة الهيمنه بالإضافة الى مبدء MaxMin

اجراء الهيمنة

يتم حذف الستراتيجة الثالثة b3

	B1	B2	Min	MaxMin
A1	2	3	2	2
A2	4	1	1	
Max	3	3		
MinMax	3			